

Análisis

Teorema de Bolzano

problemas resueltos

2º Bach MATII

BY S3R4

TEOREMA DE BOLZANO

El teorema de Bolzano establece que si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(x)$ toma valores con signos opuestos en dos puntos a y b (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto c en el intervalo (a, b) donde $f(c) = 0$.

1. **Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene raíces reales.**

Solución

Consideramos $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 23$. $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ al ser polinómica

Además

$$f(0) = -23$$

$$f(1) = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ Entonces $f(x)$ cumple las condiciones del teorema

$$f(2) = 39 > 0$$

de Bolzano. Así pues existe una raíz en el intervalo $(1, 2)$

2. **Probar que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene alguna raíz real, aproximando su valor hasta las décimas.**

Solución

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 4x - 2$.

$f(x)$ es continua por ser polinómica.

Tanteando, tenemos que $f(2) = -2$ y $f(3) = 13$

Es decir, tenemos una función continua en el intervalo $[2, 3]$ donde signo de $f(2) \neq$ signo de $f(3)$.

Por lo tanto, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in [2, 3]$ tal que $f(c) = 0$.

Para aproximar la solución a la décima seguimos tanteando: $f(2,2) = -0,152$ y $f(2,3) = 0,967$

Tenemos una función continua en el intervalo $[2,2, 2,3]$ donde signo de $f(2,2) \neq$ signo de $f(2,3)$.

Es decir, existe un $c \in [2,2, 2,3]$ tal que $f(c) = 0$.

3. **Demuestra que la ecuación $x \cos \frac{x}{2} + 15 \sin x = 0$ tiene alguna raíz.**

Solución

Sea $f(x) = x \cos \frac{x}{2} + 15 \sin x$.

$f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0, \pi]$ ya que $\sin x$, $\cos x$ y x lo son en $\mathbb{R}$

$$f(0) = 0 \cdot \cos 0 + 15 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0 + 15 = 15 > 0$$

$$f(\pi) = \pi \cos \pi + 15 \operatorname{sen} \pi = \pi(-1) + 15 \cdot 0 = -\pi < 0$$

Entonces por el Teorema de Bolzano para $f(x)$ en ese intervalo al menos existe una raíz de $f(x)$ y por lo tanto al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$

4. **Prueba que la ecuación $x^2 = 18 \ln(x)$ posee al menos una raíz real.**

Solución

Consideremos $f(x) = x^2 - 18 \ln x$, que es una función continua en $[1, e]$

$$f(1) = 1^2 - 18 \ln 1 = 1 > 0$$

$$f(e) = e^2 - 18 \ln e = e^2 - 18 < 0$$

Entonces por el teorema de Bolzano tiene al menos una raíz en el intervalo $(1, e)$

5. **¿Posee la ecuación $x \cdot \ln x - 1 = 0$ alguna solución en el intervalo $[1, e]$?**

Solución

(a) Sea $f(x) = x \cdot \ln x - 1$. Esta es una función continua en $(0, +\infty)$, por ser producto y resta de funciones continuas en ese intervalo

i. $f(1) = 1 \ln 1 - 1 = -1 < 0$

ii. $f(e) = e \ln(e) - 1 = e \cdot 1 - 1 > 0$

Aplicando a $f(x)$ el teorema de Bolzano, existe al menos una solución de la ecuación $x \cdot \ln x - 1 = 0$ en el intervalo $(1, e)$ ya que $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(1, e)$

6. **Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados de forma que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.**

Solución

Sea $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ es continua en $\mathbb{R}$, función polinómica

Consideremos el intervalo $[1, 2]$

$$f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 10 = -4 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 10 = 8 > 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[1, 2]$, $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en $(1, 2)$

Consideremos el intervalo $[-2, -1]$

$$f(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 10 = 2 > 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 10 = -6 < 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[-2, -1]$, $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en $(-2, -1)$

Consideremos el intervalo $[-5, -4]$

$$f(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 10 = -10 < 0$$

$$f(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 10 = 6 > 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[-5, -4]$, $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en $(-5, -4)$

7. **Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene una única raíz real.**

Solución

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 23$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que es una función polinómica.

$f(0) = -23 < 0$ y $f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 - 23 = 8 + 96 + 30 - 23 = 111 > 0$
 $\Rightarrow$ teorema de Bolzano, $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 2)$, pero tenemos que probar que tiene SÓLO una, para ello vamos a estudiar el crecimiento de la función: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$ y $f'(x) = 0$ nunca se anula ya que $3x^2 + 12x + 15 = 0$ NO tiene solución al ser el discriminante de la ecuación $12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 15 < 0$.

Entonces como $f'(x)$ es continua y $f'(0) = 15 > 0$, la derivada $f'(x)$ es siempre positiva y por lo tanto $f(x)$ es creciente, así que si tiene una solución, debe ser única por que la función es creciente en todo $\mathbb{R}$ y SÓLO puede cortar una vez al eje OX

8. **Comprueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres raíces reales.**

Solución

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ es continua en $\mathbb{R}$, función polinómica

Consideremos el intervalo $[0, 1]$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1 < 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[0, 1]$, $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en $(0, 1)$

Consideremos el intervalo $[-1, 0]$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 1 = -2 < 0$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[-1, 0]$, $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en $(-1, 0)$

Consideremos el intervalo $[1, 2]$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 1 = 9 > 0$$

Aplicando T. de Bolzano a $f(x)$ y el intervalo $[1, 2]$, $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en $(1, 2)$

Hemos encontrado tres intervalos y, como es un polinomio de grado 3, tiene como máximo tres raíces reales, las cuales están una en cada uno de los intervalos encontrados

9. **Probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva. tiene solución positiva. tiene solución positiva. tiene solución positiva.**

Solución

Consideremos la función: $f(x) = x - \cos x$

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ puesto que es la suma de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en el intervalo $[0, 1]$.

Además, tenemos que:

$$\bullet f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\bullet f(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0,54 = 0,46 > 0$$

Según el teorema de Bolzano, existe un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

Por lo tanto se demuestra que la ecuación tiene **al menos una** solución positiva

10. **Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.**

Solución

Sea la función h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Por ser continuas f y g en $[a, b]$, la función h también lo es.

Además

$$f(a) > g(a) \Rightarrow h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$f(b) < g(b) \Rightarrow h(b) = f(b) - g(b) < 0.$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$$