S3r4 | 2023

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Matrices

Apuntes

by Sera

1 Introducción

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo. Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton.

Las matrices se encuentran en aquellos ámbitos en los que se trabaja con datos regularmente ordenados y aparecen en situaciones propias de las Ciencias Sociales , Económicas y Biológicas.

1.1 Definición

Una matriz es una tabla rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se denota a las matrices con letra mayúscula, mientras que se utiliza la correspondiente letra en minúsculas para denotar a las entradas de las mismas, con subíndices que refieren al número de fila y columna del elemento.

Abreviadamente se puede expresar

$$A = [a_{ij}]$$

1.2 Elemento de una matriz

Cada uno de los números de que consta la matriz se denomina elemento matricial. Al elemento de una matriz A de tamaño $m \times n$ que se encuentra en la fila $i - \acute{e}sima$ y la columna $j - \acute{e}sima$ se le denota como a_{ij}, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Como vemos, cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j" , la columna. Así el elemento

$$a_{23}$$

está en la fila 2 y columna 3.

Ejemplos

de matrices son los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi & 4 & \sqrt{2} & -6 \\ 0 & 15\sqrt{10} & -4 & 0 & a \end{bmatrix}$$

tiene 2 filas y 5 columnas, diremos que su tamaño es $2x5$. ¿Qué elemento es a_{21}?.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{20} \end{bmatrix}$

B tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su tamaño es $2x2$. ¿Qué elemento es b_{22}?.

1.2.1 Dimensión de una matriz

En general, si una matriz A tiene **m** filas y **n** columnas, diremos que su tamaño o dimensión es $\boldsymbol{m}\ x\ \boldsymbol{n}$ (se lee “m por n”). Siempre se escribe en primer lugar el nº de filas y en segundo lugar el de columnas.

El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión** de una matriz. Así, una matriz de dimensión mxn es una matriz que tiene m filas y n columnas.

De este modo, una matriz puede ser de dimensión: $2x4$ (2 filas y 4 columnas), $3x2$ (3 filas y 2 columnas), $2x5$ (2 filas y 5 columnas),...

Si la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, se dice que es de orden: $2, 3, 4, ...$

El **conjunto de matrices** de m filas y n columnas se denota por M_{mxn}.

Como se ha dicho un poco mas arriba, un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila i y en la columna j, se denota por a_{ij}.

1.2.2 Matrices iguales

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

2 Tipos de matrices

2.0.1 Matriz nula

Se llama **matriz nula** a la que tiene todos los elementos cero.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A es la matriz nula de tamaño $2x6$

2.0.2 Matriz fila

Se llama matriz fila a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es $1xn$.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

A es una es una matriz fila de tamaño $1x5$

2.0.3 Matriz columna

Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será mx1, como por ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \\ \sqrt{60} \end{bmatrix}$$

C es una es una matriz columna de tamaño $4x1$

2.1 Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es $n \times n$.

La matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{20} \end{bmatrix}$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2 x 2 o simplemente de orden 2.

Otro ejemplo de matriz cuadrada es:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & \sqrt{20} & 6 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

de orden 3.

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos **diagonal principal** a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$, siendo la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & an3 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

En la matriz D del ejemplo anterior, su diagonal principal estaría formada por 1, $\sqrt{20}, -1$.

Se llama **traza de la matriz** a la suma de los elementos de la diagonal

Es decir, $Traza(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$, y en el caso de D, $Traza(D) = 1 + \sqrt{20} - 1 = \sqrt{20}$.

La **diagonal secundaria** es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ..., a_{n1}$. (la suma de los subindices es n+1)

En la matriz D estaría formada por $5, \sqrt{20}, 2$.

Una clase especial de matrices cuadradas son las matrices triangulares.

2.1.1 Matriz triangular

Una matriz es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y **triangular inferior** si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Ejemplos

de estas matrices:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & \sqrt{20} & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{Triangular superior}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{20} & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \text{ Triangular inferior}$$

2.1.2 Matriz diagonal

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal.Una matriz de este tipo se denomina **matriz diagonal**.

Un ejemplo de matriz diagonal sería:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Matriz escalar

Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Matriz Identidad

Por último, si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina **matriz unidad o identidad**.

Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz.

Algunas matrices identidad serían:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Matriz regular

Una matriz se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y denotada por A^{-1} si $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual.

2.2 Matriz singular

Una matriz singular no tiene matriz inversa.

2.2.1 Matriz idempotente

Una matriz, A, es idempotente si

$$A^2 = A$$

Ejemplos

Matrices idempotentes son si la matriz es nula o la matriz unidad:
$\mathbf{O}^2 = \mathbf{O} \qquad \mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$.

Por ejemplo, las siguientes matrices son idempotentes:

$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.2 Matriz involutiva

Es una matriz cuadrada que es su propia inversa. Es decir, la multiplicación por la matriz A es una involución si y sólo si $\mathbf{A^2} = \mathrm{I}$. Esto es simplemente una consecuencia del hecho de que cualquier matriz no singular multiplicada por su inversa es la identidad.

Una matriz, A, es involutiva si:

$$A^2 = I$$

Ejemplos

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{I}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donde
R es una matriz identidad con un par de filas intercambiadas;
S es una matriz diagonal cuyos elementos en su diagonal son ± 1.

2.3 Matriz simétrica

Una matriz simétrica es una matriz cuadrada que verifica:

$$A^t = A$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

2.4 Matriz antisimétrica o hemisimétrica

Una matriz antisimétrica o hemisimétrica es una matriz cuadrada que verifica:

$$-A^t = A$$

Ejemplo

La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica, ya que $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$

2.5 Matriz ortogonal

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$$A \cdot A^t = I$$

Ejemplo

$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; M_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} con \phi real$ son ortogonales

3 Aplicaciones

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo:

Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

$$\begin{bmatrix} & 2 unidades & 5 unidades & 10 unidades \\ Color N & 0,04 & 0,08 & 0,12 \\ Color F & 0'03 & 0,05 & 0,08 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

$$\begin{bmatrix} & Color\ N & Color\ F \\ 2\ unidades & 70000 & 50000 \\ 5\ unidades & 60000 & 40000 \\ 10\ unidades & 50000 & 5000 \end{bmatrix}$$

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

4 Operaciones

4.1 Suma y resta de Matrices

Para sumar o restar dos matrices del mismo tamaño, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la **suma** (y diferencia) de matrices :

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$
- **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elemento neutro:** La matriz nula del tamaño correspondiente.
- **Elemento opuesto de**A**:** La matriz $-A$, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo:

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} ; -A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2 Producto por un número real

Dada una matriz cualquiera A y un número real $k \in \Re$, el producto $k \cdot A$ se realiza multiplicando cada uno de los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual tamaño. Por ejemplo:

$$5A = 5 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}; 5A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 5 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Propiedades:

- **Distributiva** respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- **Distributiva** respecto de la suma de números:$(k + d) \cdot A = k \cdot A + d \cdot A$
- **Asociativa**:$k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$
- **Elemento neutro**, el número 1: $1 \cdot A = A$

Ejercicio:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación:

$$2 \cdot X - 4 \cdot A = B$$

.

4.3 Trasposición de matrices

Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} ; A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, si A es una matriz de tamaño mxn, su traspuesta A^t tendrá tamaño nxm, pues el número de columnas pasa a ser el de filas y viceversa. Si la matriz A es cuadrada, su traspuesta tendrá el mismo tamaño.

4.4 Propiedades

- $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial(Prop. involutiva).
- $(A + B)^t = A^t + B^t$ (Prop. Distributiva)
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ (Prop Lineal)

En base a esta nueva operación, podemos definir otras dos clases de matrices, que son:

4.4.1 Matriz simétrica

Es aquella para la que se cumple que $A^t = A$,

por ejemplo la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix} ; A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ es simétrica .

En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

Ejercicio ¿Puede ser simétrica una matriz que no sea cuadrada?¿Por qué?.

4.4.2 Matriz antisimétrica,

es aquella para la que se cumple que $A^t = -A$.

Por ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica (comprueba).En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos (¿por qué?),y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

Ejercicios:

1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $yB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *calcula* $3A^t - B^t$.

2. . Obtener las matrices X e Y que verifiquen los sistemas:

3. $\left\{ \begin{array}{lcl} 2X - 3Y & = & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ X - Y & = & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \right.$ $b) \left\{ \begin{array}{lcl} X + Y & = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ X - Y & = & \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$ $c) \left\{ \begin{array}{lcl} 2X + Y & = & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ X + 2Y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \right.$

4.5 Producto de matrices

Dadas dos matrices, A de orden m×n y B de orden n×p, su matriz producto $C = A \cdot B$ es una matriz de orden m×p. Para multiplicar matrices se toman los elemento de la 1ª matriz como **vectores fila** y los elementos de la 2ª matriz como **vectores columnas**, de está forma, la matriz producto estará formada por los productos escalares de los vectores fila de la 1ª matriz por los vectores columna de la 2ª matriz.

No todas las matrices pueden multiplicarse.

Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

"Para multiplicar dos matrices A y B, en este orden, A·B , es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B"

esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2r} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Una vez comprobado que el producto A·B se puede realizar, si A es una matriz m x n y B es una matriz n x p (observemos que el nº de columnas de A = n = nº de filas de B), entonces el producto A·B da como resultado una matriz C de tamaño n x r del siguiente modo:

"El elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz C=A·B, se obtiene multiplicándolos elementos de la fila i de A por la columna j de B y sumando los resultados"

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1} & a_{11} \cdot b_{12} + ... + a_{1n} \cdot b_{n2} & ... & a_{11} \cdot b_{1r} + ... + a_{1n} \cdot b_{nr} \\ a_{21} \cdot b_{11} + ... + a_{2n} \cdot b_{n1} & a_{21} \cdot b_{12} + ... + a_{2n} \cdot b_{n2} & ... & a_{21} \cdot b_{1r} + ... + a_{2n} \cdot b_{nr} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} \cdot b_{11} + ... + a_{mn} \cdot b_{n1} & a_{m1} \cdot b_{12} + ... + a_{mn} \cdot b_{n2} & ... & a_{m1} \cdot b_{1r} + ... + a_{mn} \cdot b_{nr} \end{pmatrix}$$

Veámoslo mediante un ejemplo:

Ejemplo

Para multiplicar las matrices: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{2x4}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{4x3}$

primero comprobamos que se puede realizar el producto A·B, pues el nº de columnas de A es 4 y elnº de filas de B también es 4, y el resultado, según lo dicho será una matriz de tamaño 2 x 3, tiene 2 filas y 3 columnas:

$$AB = \begin{bmatrix} -3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 5 \cdot -1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 13 \\ 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

El elemento de la fila 1 y columna 2 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 2 de B y sumar: $-3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1$

El elemento de la fila 1 y columna 3 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 3 de B y sumar: $-3 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4$

Así sucesivamente

Ejemplo

Sean

$A \in M_{1\times 3}$;$B \in M_{3\times 1}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\7\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(4)+3(7)+5(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+21+10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27\end{bmatrix}$$

4.5.1 Ejercicios:

1. Para las matrices A y B anteriores, calcula B·A
2. Si $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\-2 & 4 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, calcula si es posible $A \cdot B$y $B \cdot A$. ¿Coinciden?.
3. Para las matrices $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\4 & 0 & -3\end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & -5\\1 & 4\end{bmatrix}$

   calcula:$A+B, 3A-4B, A\cdot B, B\cdot C, A^t\cdot C, B^t\cdot A$

4.6 Propiedades del producto de matrices

- **Asociativa**:$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
- **Distributiva respecto de la suma**:$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C (B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$
- **Elemento neutro**, la matriz identidad correpondiente, si A es m x n:

$$A\cdot I_n = I_m \cdot A = A$$

- En general **el producto de matrices no es conmutativo**

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

- El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula

Se dice que el conjunto de las matrices con la operación producto tiene divisores de cero, es decir, hay matrices no nulas cuyo producto es nulo.

La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto en orden inverso de las matrices traspuestas:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Ejercicio resuelto

.Para las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & 4 \end{bmatrix}$y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.Hallar $B^t A^t$

$B^t A^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2a+5b-4 \end{bmatrix}_{1x2}$.

$(AB)^t = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} -4 & 2a+5b-4 \end{bmatrix}$.

Es decir $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Ejercicios:

1. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿**son ciertas** las propiedades siguientes,que son ciertas para las operaciones con números reales?:

   a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$

   b) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

   c) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$

2. Determina los valores de a y b de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$para que $A^2 = A$.

3. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

4.Para las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & 4 \end{bmatrix}$y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.Hallar $B^t A^t$

5 La matriz inversa

Sabemos ya multiplicar matrices y hemos visto algunas de las propiedades de esta operación.

Recordemos, en primer lugar, que **no siempre es posible efectúar la multiplicación de dos matrices**, y en segundo lugar, que aunque sea posible hacer esta multiplicación, en general **no es conmutativo**,es decir A·B es distinto de B·A.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

.

En el caso particular de que tratemos con matrices cuadradas del mismo orden A y B, es claro quepodemos efectuar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, que darán como resultado otra matriz del mismo orden,aunque, como ya se ha dicho, las matrices resultantes serán, en general, distintas.

Sabemos también que el elemento neutro del producto de matrices es la matriz identidad I_n.Por analogía con el caso de los números reales, podemos plantearnos la siguiente cuestión:

Si tenemos un número real, por ejemplo el 2, podemos interesarnos en buscar el inverso del 2 para el producto, es decir un número real x tal que 2·x = 1, el producto de 2 por x sea igual al elemento neutro, el 1.

Evidentemente, en el caso de los números reales es bien fácil despejar x para obtener, en nuestrocaso, que $x = \frac{1}{2}$, es decir, el inverso de un número real es otro número que multiplicado por él da el elemento neutro, el 1.

Todo número real, salvo el 0, tiene inverso.

Trasladando esto a las matrices, nos podemos plantear si dada una matriz cuadrada A de orden n,cualquiera, existe su inversa X para el producto de matrices,tal que $A \cdot X = I_n$ es decir, el producto de A por su inversa produce el elemento neutro matricial, la matriz identidad I_n.

Sin embargo, hay algunas diferencias con respecto al caso de los números reales:

- No podemos "despejar" la matriz X del modo $X = I_n A$, porque no hemos definido la división de matrices.
- No todas las matrices cuadradas no nulas tienen matriz "inversa" (sea lo que sea, por analogía con los números)

Definamos, en primer lugar, el término de **matriz inversa**:

Dada una matriz cuadrada de orden n , A, se dice que A es invertible (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada porA^{-1}y tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \text{ y } A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es singular o no invertible.

5.0.1 Si existe la inversa, es única

Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una).

En nuestra definición de inversa de una matriz nos hemos apresurado en referirnos a la inversa. En principio podría ocurrir que, dada una matriz A, muchas matrices A^{-1} satisfacieran los requisitos impuestos por la fórmula $A \cdot A^{-1} = I_n$ y $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Pero un sencillo razonamiento muestra que, a lo sumo, hay una. Dada una matriz A, consideremos inversas B_1 y B_2, entonces $B_1 \cdot A = A \cdot B_1 = I, \quad B_2 \cdot A = A \cdot B_2 = I$. La igualdad $A \cdot B_1 = I$ implica que $B_2 \cdot (A \cdot B_1) = B_2 \cdot I = B_2$.

Por lo tanto

$$(B_2 \cdot A) \cdot B_1 = B_2.$$

Como $B_2 \cdot A = I$ concluimos que $B_1 = I \cdot B_1 = B_2$, por lo que ambas matrices son en realidad la misma y, si la inversa existe, es única.

6 Cálculo de la inversa

Para calcular dicha matriz inversa, podemos utilizar dos vías:

6.1 Método directo:

Consiste en determinar A^{-1}planteando un sistema de ecuaciones, es decir, si por ejemplo queremos determinar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1\cdot \end{bmatrix}$, lo que estoy buscando es otra matriz de igual tamaño(orden 2) tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$ y $A^{-1} \cdot A = I_2$, es decir, si

$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, se tiene que cumplir que :

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\cdot \end{bmatrix}$$

$x + 2z = 1; y + 2t = 0; -x + z = 0; -y + t = 1$

Es decir, hemos de resolver un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, aunque en realidad son 2 sistemas de dos ingónitas cada uno (uno con x y z y otro con y y t).

Resolviendo el sistema se obtiene que $x = \frac{1}{3}, y = \frac{-2}{3}, z = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{3}$

por lo que la matriz inversa es:$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede comprobar que también se cumple que $A^{-1} \cdot A = I_2$, luego A es invertible, tiene inversa.

- Si el sistema no tiene solución, la matriz no tiene inversa.

Por ejemplo, en el caso en que

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, del mismo modo :$A \cdot A^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow x + z = 1; y + t = 0; 2x + 2z = 0; 2y + 2t = 1$

Y por ejemplo de $2x+2z = 0$ se obtiene $x = -z$, si se sustituye en la primera ecuación es $-z + z = 1$, esdecir $0 = 1$ (imposible).

El sistema no tiene solución.Por tanto A no es invertible, es singular.

Este método directo sólo se suele utilizar para matrices cuadradas de tamaño 2, puesto que paralas de tamaño 3 obtenemos un sistemas de ¡9 ecuaciones con 9 incógnitas! que realmente es difícil deresolver

6.2 Método de Gauss-Jordan:

Consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz para llegar a obtener lamatriz identidad. Realizando estas mismas transformaciones con la matriz identidad llegamos a la matriz .A^{-1}

Se llama transformación elemental en una matriz a:

Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero. Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número real no nulo. Intercambiar el lugar de dos filas entre sí .Veamos como se realiza el método de Gauss-Jordan, realizándolo a la vez con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Consideramos la matriz formada por A y la matriz identidad correspondiente . En nuestro caso:$(A|I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Se hace la matriz triangular superior (es decir, hacemos ceros por debajo de la diagonal principal)usando transformaciones elementales en filas. La

   mejor forma de realizar esto es hacer cero los elementos por debajo de la diagonal en la primera columna usando la fila 1. Luego, hacer cero los elementos por debajo de la diagonal en la segundacolumna usando la fila 2, y así sucesivamente.

   En nuestro caso, basta sumar la fila 2 con la fila 1, y se obtiene:
   $F_2 \longrightarrow F_2 + F_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Una vez hecha la matriz triangular superior, se hace la matriz triangular inferior, haciendo ceros a los elementos por encima de la diagonal. El proceso es parecido al anterior:

   Hacer cero los elementos por encima de la diagonal en la última columna usando la última fila. Luego,hacer cero los elementos por encima de la diagonal en la penúltima columna usando la penúmtimafila, y así sucesivamente. En nuestro caso:
   $3 \cdot F_1 - 2 \cdot F_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Ya tenemos una matriz diagonal. Lo único que falta es dividir a cada fila entre el númeroadecuado para obtener unos en la diagonal principal, es decir, para obtener la matriz identidad en la parte izquierda:
   $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

5. Una vez se tiene la matriz identidad en la parte de la izquierda, la parte derecha es la matriz inversa,es decir, llegamos a:
$(I_2|A^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$matriz que habíamos obtenido antes por el método directo.

Si al realizar el método de Gauss-Jordan en algún momento alguna fila es de ceros, la matriz no tiene inversa.

Este es el mejor método cuanto mayor sea el orden de la matriz frente al directo.

7 Rango de una matriz

Un concepto muy importante relacionado con las matrices es el de rango. El concepto de rango se encuentra ligado al de "independencia lineal" de filas o columnas de una matriz, pero no se introducirá de esta manera porque se requieren conceptos que no conocemos. Baste saber que se define el rango de una matriz como el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

Sin embargo, el cálculo del rango de una matriz lo abordaremos desde otra perspectiva, utilizando el método de Gauss.

Supongamos que tenemos una matriz cualquiera A a la que aplicamos el método de Gauss con el fin de simplificarla lo más posible (es decir, consiguiendo que tenga el mayor número de ceros posible),realizando operaciones u transformaciones elementales en filas.

Llamaremos rango de la matriz A y lo representaremos por Rg(A) al número de filas no nulas dela matriz tras aplicarle el método de Gauss.

Definición : Se llaman transformaciones elementales por filas en una matriz a las siguientes:

a) Intercambiar las filas i y j, que lo escribiremos: $F_i \leftrightarrow F_j$.

b) Sustituir la fila i por el resultado de multiplicarla por un escalar a $\neq 0$, que lo escribiremos: $F'_i{=}aF_i$.

c) Sustituir la fila i por el resultado de sumar los productos de las filas i yj por dos escalares a $\neq$0,b $\neq 0$, que los escribiremos: $F'_i = aF_i + bF_j$

Las transformaciones elementales no modifican el rango

Nota:Hay que observar que estas transformaciones también se extienden a combinaciones lineales entre más de dos filas siempre que el escalar que multiplique a la fila que se cambia no sea nulo.

Por ejemplo, es válida la transformación $F'_3 = 3F_3 + 4f_2 - 5F_1$, pero no es válida la transformación: $F'_3 = 2F2 + 5F_1$ ya que el coeficiente de la fila 3 es nulo (no aparece).

Las transformaciones más habituales son las del tipo: $F'_2 = -2f_2 + 6F_6$, que, aunque no es elemental, si es la combinación de dos elementales.

Ejemplo:

Calcular el rango de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $F_2 - 2 \cdot F_1 \longrightarrow rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$, Rg(A)=1 ,sólo una fila distinta de cero.

b) Intercambiando filas $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
Rg(B)=2 hay 2 filas no nulas.

c)$rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix})$

$F_2 - 2 \cdot F_1 \longrightarrow rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix})$

$F_3 + F_1 \longrightarrow rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix})$

$F_3 + 2 \cdot F_2 \longrightarrow rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$ Rg(C)=2 hay 2 filas no nulas.

d) $2 \cdot F2 + F1 \longrightarrow rang(A) = ran)(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$, Rg(D)=1, sólo una fila no nula.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que el rango de cualquier matriz siempre es menor oigual que el número de filas de la matriz. De hecho se verifica que el rango de cualquier matriz siempre es menor o igual que su número defilas y de columnas, pues el proceso para hacer el método de Gauss se puede hacer indistintamentemediante operaciones elementales en filas o en columnas. Esto permite, antes de calcular el rango de una matriz, saber entre qué valores va a estar ese rango.

Por ejemplo, en el caso c) del ejemplo, como la matriz es $3x3$, el rango sólo puede ser 1, 2 ó 3,no hay otras posibilidades.

En el caso del apartado d), como la matriz es $2x3$, el rango sólo puede ser 1 ó 2. (De hecho,podemos reducir esto algo más , pues una matriz sólo tiene rango cero si es la matriz nula).Resumiendo:

Propiedad:

Si A es una matriz de tamaño m x n no nula se cumple que:

$$1 \leq Rg(A) \leq min\{m, n\}$$

Ejemplo:

Calcular en función de k el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$

Aplicando Gauss, $F_2 - 3 \cdot F_1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-6 \end{pmatrix}$

Ahora es evidente que si $k - 6 = 0$, la última fila es nula.

Por tanto, si $k = 6$, la última fila es nula y elrango de A es 1, $Rg(A) = 1$, mientras que si $k - 6$ es distinto de cero, es decir si k es distinto de 6, hay 2 filas no nulas y el rango de A es 2,$Rg(A) = 2$.

Resumiendo:

Si $k \neq 6$, entonces $Rg(A) = 2$

Si $k = 6$, entonces $Rg(A) = 1$

La siguiente propiedad permite relacionar el concepto de rango con el de matriz inversa visto anteriormente:

Propiedad:

Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Longleftrightarrow$ $Rg(A)$ es máximo.

7.1 Ejercicios resueltos

Junio 2004.Prueba B .Dada la matriz B= $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hállese una matriz X que verifique la ecuación $XB + B = B^{-1}$.

Solución

$X \cdot B + B = B^{-1} \rightarrow$ pasamos B al otro miembro $X \cdot B = B^{-1} - B \rightarrow$ multiplicamos por B a la derecha $X \cdot B \cdot B^{-1} = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1}$

$X \cdot Id = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \Longrightarrow X = B^{-1} \cdot B^{-1} - B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B^{-1} - I_d$

Calculando B^{-1} tenemos que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con lo que X= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Septiembre 2004. Prueba B Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz B sabiendo que $P^{-1}BP = A$.

Solución

$P^{-1} \cdot B \cdot P = A$

Multiplicamos por P por la izquierda

$P \cdot P^{-1} \cdot B \cdot P = P \cdot A \Longrightarrow I_d \cdot B \cdot P = A \cdot P \Longrightarrow B \cdot P = P \cdot A$

Multiplicamos por P^{-1} por la derecha

$B \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot A \cdot P^{-1} \Longrightarrow B = P \cdot A \cdot P^{-1}$

Calculando $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

tenemos que la matriz B buscada es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Junio 2005. Prueba B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.

Solución

$XC + A = C + A^2$

Pasamos A al otro miembro

$XC = C + A^2 - A$

Multiplicamos por C^{-1} por la derecha

$XC \cdot C^{-1} = (C + A^2 - A) \cdot C^{-1} \Rightarrow$

$X = (C + A^2 - A) \cdot C^{-1} \Longrightarrow X = I_d + (A^2 - A) \cdot C^{-1}$

Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego $X = I_d + (A - A) \cdot C^{-1} I_d + (O) \cdot C^{-1} = I_d$

Junio 2006. Prueba B Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP = A$.

Solución $B \cdot P = A \Longrightarrow BP \cdot P^{-1} = A \cdot P^{-1} \Longrightarrow B = A \cdot P^{-1}$

Calculando $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Junio 2007 Sean X una matriz 2x2, I la matriz identidad 2x2 y B$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX + B = B^2 + I$.

Solución $BX + B = B^2 + I$

$BX = B^2 + I_d - B \Longrightarrow B^{-1} BX = B^{-1}(B^2 + I_d - B) \Longrightarrow X = B - B^{-1} 1 - I_d$.

Calculando $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Junio 2008. Prueba A Sean B$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y C$= \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ calcular A sabiendo $A^2 = B y A^3 = C$

Solución .Sería muy dificil solucionar escribiendo $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.En lugar de eso atacamos el problema de la manera siguiente

Si $B = A^2$ y $C = A^3$, entonces se cumple que $C = A^2 \cdot A = B \cdot A \Longrightarrow C = B \cdot A \Longrightarrow B^{-1} \cdot C = A$

Calculando $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

A$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix}$