Operaciones con matrices:

1. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar:

   a) $4A - 5B + A{\cdot}B$

   b) $B{\cdot}A + A - 10B$

2. Calcular $A{\cdot}B$. ¿Se puede hallar $B{\cdot}A$?

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. Hallar $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$ siendo $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} z & y & z \end{pmatrix}$

4. Hallar $A^2 - 3A - I + 2A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, probar que las matrices de la forma $B = \lambda A + \mu I$, son permutables con A, es decir, $A{\cdot}B = B{\cdot}A$ (También se dice que A y B conmutan).

6. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{100}.

7. Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Hallar A^{n} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. ¿Existe una matriz B tal que el producto $A{\cdot}B$ sea una matriz de tres filas siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$?

10. Se dice que dos matrices conmutan si $AB = BA$. Encontrar todas las matrices que conmutan con $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Sea A una matriz de dimensión $5x4$ y B mxn y C $3x7$. Si se sabe que se puede obtener el producto ABC. ¿Cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y de la matriz ABC?

12. Si A es una matriz mxn ¿Existe siempre el producto $A^t{\cdot}A$?

13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^n.

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices B, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, tales que $A{\cdot}B = -B{\cdot}A$

15. Calcula x, y y z sabiendo que las matrices A y B son iguales, dónde: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & y & x & x \\ -x & z & z & x \\ y & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -3 \\ 0 & x & x & x \\ -3 & -z & 0 & x \\ x & z & 0 & -3 \end{pmatrix}$

16. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

    Calcula:

a) $A + B$	*d*) $A{\cdot}B$	*g*) $-3{\cdot}B$	*j*) A^{-1}
b) $A - B$	*e*) $B{\cdot}A$	*h*) $2{\cdot}A$	*k*) $(A{\cdot}B)^{-1}$
c) A^t	*f*) A^2	*i*) $(A{\cdot}B)^t$	*l*) $A - B^{-1}$

17. Se dice que dos matrices conmutan si $AB = BA$. Encontrar todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$ halla los valores de x e y para los que se verifica $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix}$, averigua si existe algún valor de x para el que se verifica $A^2 = A$.

20. Sean A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, siendo I la matriz unidad. Demuestra que B^2 es igual a la matriz unidad.

21. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Calcula A^n.

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$:

    a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

    b) Expresa A^{2n} en función de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. Hallar $\mathrm{A^n}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Hallar $\mathrm{A^n}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, calcula el valor de la siguiente expresión $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2$.

Matriz inversa:

26. Halla por el método de Gauss-Jordan las matrices inversas de:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

28. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprobar que

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

29. Halla las matrices inversas de:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Rango:

30. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

a) 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6) $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

7) $G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8) $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 8 & 16 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

9) $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

31. Hallar el rango de las siguientes matrices:

a) $A =? \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) C= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

32. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -2 & 6 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

33. Sabiendo que la matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & a & b \\ -2 & c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1, determina a, b,c y d.

34. Calcula el rango de la matriz siguiente par los diferentes valores de t:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2t \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales:

35. Sea k un número natural y sean las matrices$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

 a) Calcular A^k

 b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k \cdot X = B \cdot C$.

36. Consideremos las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz A tal que al multiplicarla por B y sumarle C nos de $2A$.

37. Obtener las matrices A y B tales que $3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$.

38. Resuelve la ecuación: $A \cdot X + B \cdot X = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

39. Resuelve la ecuación $A \cdot X = B^2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

40. Resuelve $A \cdot X \cdot B = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$

41. Resuelve $X \cdot A – I_2 = B – A$, siendo I_2 la matriz unidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

42. Hallar todas las matrices A que satisfacen la ecuación: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

43. Resolver las siguientes ecuaciones siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$:

a) $AX = B$

b) $XA = B$

44. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A{\cdot}X = B con A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $X{\cdot}A = B + C con A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A{\cdot}B - B^t{\cdot}X = A^{-1} + X con A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

45. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

46. Calcula la matriz M que verifica $A{\cdot}M - B = C^t$.

47. Resuelve la ecuación matricial $X{\cdot}A = X{\cdot}B - A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

48. Calcula la matriz X que verifica $A{\cdot}X{\cdot}B = 3{\cdot}C$, siendo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

49. Halla la matriz X que verifica $A{\cdot}X - B = 2{\cdot}X$, siendo: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

50. Halla la matriz X que verifica $A{\cdot}X{\cdot}A = B{\cdot}A$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

51. Halla la matriz X que verifica $A{\cdot}X + C{\cdot}B^t = B{\cdot}B^t$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$