S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II CCSS

Programación Lineal

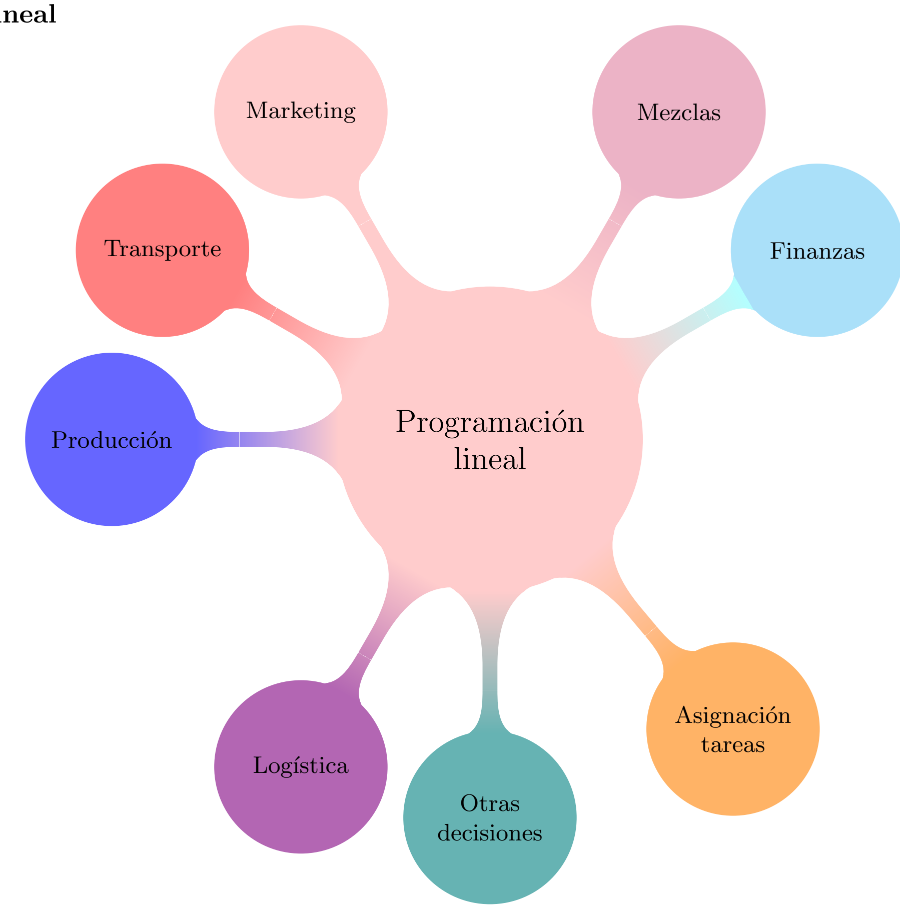
Apuntes

by Sera

La programación lineal se plantea como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

En los últimos 75 años, las empresas, cada vez mayores y complejas, han tratado de responder de manera eficiente a una cierta clase de problemas de optimización. El interés radica en asuntos tales como la manera más beneficiosa de manejar un proceso industrial, un proceso económico, o cómo organizar óptimamente los horarios de asistentes de vuelo en una compañía aérea, o averiguar la correcta mezcla de ingredientes de un producto para satisfacer a un costo mínimo ciertas especificaciones, etc.

En este tema hableremos de problemas simples de dos variables y de cómo formularlos y resolverlos, intentando optimizar un recurso por medio de la técnica conocida como **programación lineal**



Introducción

El modelo de programación lineal, esto es, la optimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales, es sencillo en su estructura matemática, pero poderoso por su capacidad de adaptarse a un amplio rango de aplicaciones a problemas de la vida real.

Los problemas de programación lineal se interesan en la asignación eficiente de recursos limitados con el fin de alcanzar objetivos deseados. Estos problemas se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las condiciones impuestas por cada problema. La selección de una solución concreta, como la mejor a un problema, dependerá de cierto objetivo implícito en el planteamiento del problema. Una solución que satisfaga todas las condiciones del problema y además alcance el objetivo deseado se denomina **"solución óptima"**

Un problema de **programación lineal** es un problema en en que debemos hallar el valor máximo o mínimo de una expresión lineal llamada **función objetivo**

$$f(x, y) = ax + by$$

cuyas variables están sujetas a unas restricciones lineales de la forma

$$Ax + By \leq N$$

ó bien

$$Ax + By \geq N$$

donde A y B no son nulos a la vez.

- Las variables x, y llaman las **variables decisión**.
- La **solución factible** buscada que hace óptima (máxima o mínima, según marque el problema) la función objetivo, se llama **solución óptima**, y **siempre se encuentra en la frontera de la región factible**.
- El **valor óptimo** es el valor más grande o más pequeño de la función objetivo. Se deben dar como soluciones las duplas (x, y) que resultan dar el valor óptimo de esa función.

Teorema fundamental de la programación lineal

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

De este teorema obtenemos las consecuencias:

- Si hay una **única solución óptima**, ésta se encuentra en un **vértice** de la región factible,
  - Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.
  - Hay casos donde las solución es un conjunto finito de valores, como por ejemplo si hay una exigencia de que la solución sean los números naturales de un segmento.
- En el caso de que la región factible no sea acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.
- Si hay **infinitas soluciones óptimas**, se encontraran en un **lado** de la región factible.
- Es posible que no haya solución óptima, pues cuando el recinto es no acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.

Para resolver el problema, podemos abordarlo de dos formas, pero antes a aplicar cualquiera de ellas siempre hay que dibujar la región factible, resolviendo el sistema de inecuaciones lineales correspondiente(la región factible puede estar acotada o no), y se calculan los vértices de dicha región.

Forma geométrica

- En este caso se representa el vector director de la recta que viene dada por la ecuación de la función objetivo, $F(x, y) = Ax + By$, que hay que maximizar o minimizar.
- El vector director de la recta $Ax + By$ viene dado por $v = (-B, A)$.
- Como lo único que nos importa es la dirección del vector y no su módulo (longitud), podemos dividir a las coordenadas del vector si los números son muy grandes, puesto que vectores con coordenadas proporcionales tienen la misma dirección.
- Se trazan rectas paralelas a este vector que pasen por los vértices de la región factible (si es acotada) , o por todo el borde de la región factible (cuándo no es acotada) y se observa en qué vértice la función F se hace máxima (o mínima) sin más que tener en cuenta cuál de las rectas tiene mayor (o menor) ordenada en el origen, es decir, qué recta corta en un punto mayor o menor al eje y.

Resolución de inecuaciones con dos variables

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión en la que dos expresiones lineales están relacionadas entre sí por una desigualdad.

En su forma reducida podemos encontrar cuatro tipos de inecuaciones lineales:

$$ax + by < c \ ; \ ax + by > c \ ; \ ax + by \leq c \ ; \ ax + by \geq c$$

Las dos primeras se denominan desigualdades estrictas y las dos últimas desigualdades amplias.

Resolver una inecuación en dos variables consiste en encontrar todos los pares de valores de (x, y) para los cuales se cumple la desigualdad.

El método habitual para resolver las inecuaciones lineales es el método gráfico.

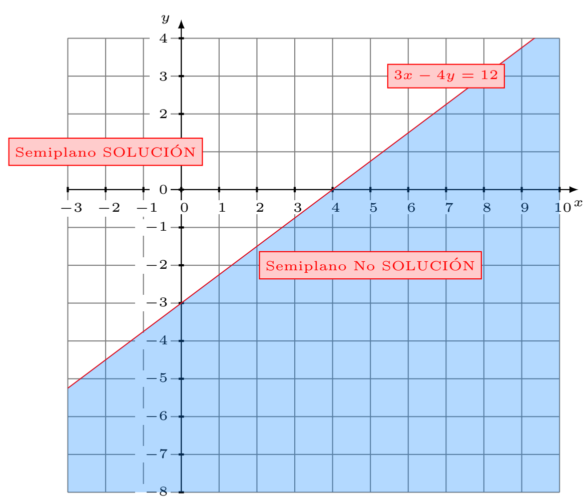
La ecuación resultante de convertir la desigualdad en una igualdad: $ax + by = c$ es una línea recta, y su representación gráfica divide al plano en dos semiplanos: Uno de esos semiplanos es la solución de la inecuación.

Ejemplo

Resolver gráficamente $3x - 4y < 12$

Solución

x	$3x - 4y = 12$	Puntos
0	$\frac{12-3\cdot 0}{-4} = -3$	(0,-3)
4	$\frac{12-3\cdot 4}{-4} = 0$	(4,0)



Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez. Para resolver un sistema de inecuaciones lineales se procede de la manera siguiente:

• Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano solución de cada una de las inecuaciones.

• El conjunto solución del sistema, también llamado región factible, está formado por la i**ntersección o región común** de las soluciones de todas las inecuaciones.

Ejemplo

Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

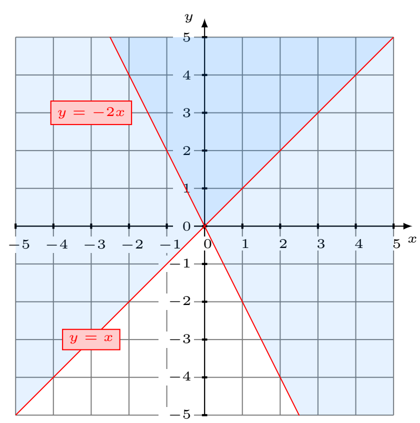
En primer lugar, se despeja y de las dos inecuaciones quedando

$$\begin{cases} y > -2x \\ y < x \end{cases}$$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = -2x$ que es la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, -2)$ y se considera la región donde se verifica $y > -2x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 1, y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 > -2$).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $y = x$ que es la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y tomamos la región donde se verifica $y < x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2, y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 2$).

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones que se muestra sombreada por dos veces en el siguiente dibujo:



Ejemplo

El siguiente es un ejemplo típico de problema PL:

Determinar el valor mínimo de

$$C = 3x + 4y$$

sujeta a las iguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 12, \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución

Dibujar el conjunto solución de una desigualdad lineal de cada restricción

Para dibujar la región representada por una desigualdad en dos variables:

A. Dibujar la recta que se obtiene por sustituir una igualdad por la desigualdad.

Si el punto de prueba satisface la desigualdad, el conjunto de las soluciones es la región entera en el mismo lado de la recta. Si no, el conjunto solución es la región del otro lado de la recta. En cualquier de los dos casos, **sombrea la región opuesta para dejar sin color el conjunto solución**.(Se puede hacer también al revés , coloreando la región solución)

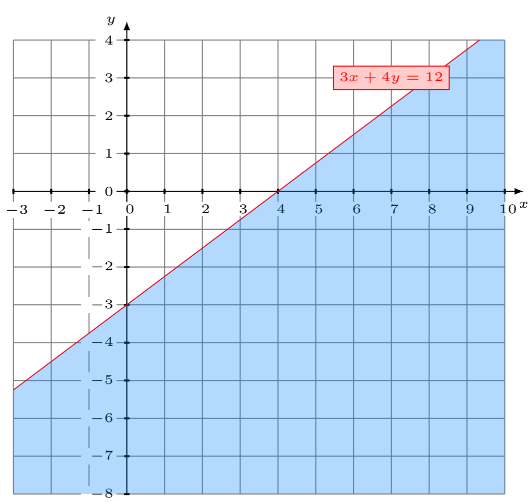
Para dibujar la desigualdad lineal: $3x - 4y \leq 12$,

Primero dibuja la recta $3x - 4y = 12$.

Después, elije el origen $(0, 0)$ como el punto de prueba (pues no está en la recta).

Sustituyendo $x = 0$, $y = 0$ en la desigualdad, obtenemos $3(0) - 4(0) \leq 12$, una declaración verdadera.

Entonces, $(0, 0)$ sí está en el conjunto solución, que se consiste entonces de todos los puntos en el mismo lado que $(0, 0)$.



Región factible

La región factible queda determinada por el conjunto de restricciones, esto es, la región es el conjunto de puntos que satisfacen a la vez todas las desigualdades.

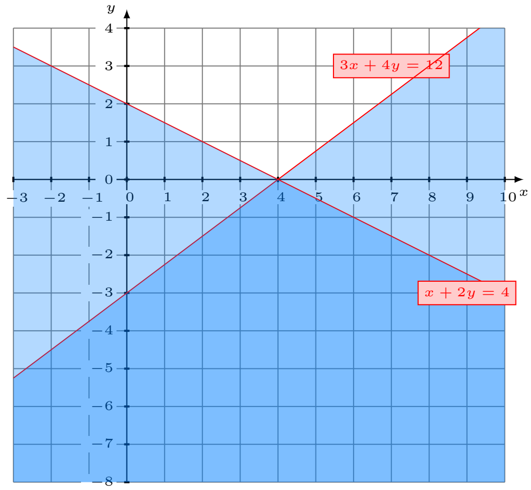
Para dibujar la región :

Dibujar las regiones determinadas por cada desigualdad recordando en cada caso sombrear la parte del plano que no queremos. La región que permanece sin sombreado es la región factible.(podemos también resolver de la forma contraria, sombreando la región que cumple la desigualdad, en este caso la región será la que esté sombreada todas las veces).

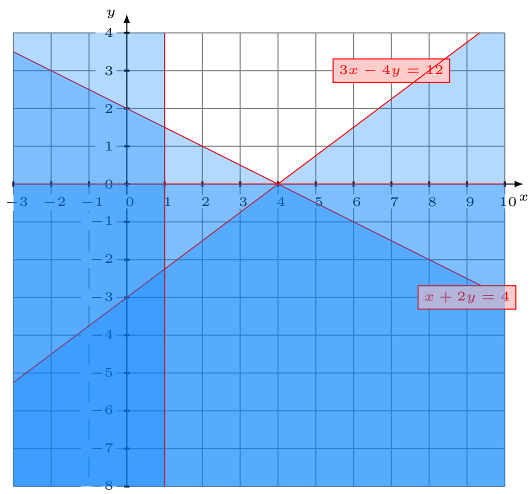
La región factible determinada por el siguiente conjunto de desigualdades es la región no sombreada mostrada más abajo (incluyendo su frontera, por $\leq$).

$3x - 4y \leq 12$

$x + 2y \geq 4$



Añado las condiciones $x \geq 1$ y $y \geq 0$.



Hallar los vértices de la región

Como vemos la región no coloreada es la que soluciona las inecuaciones. Es una región no acotada y tiene por vértices los puntos $(4, 0)$ y $(1, 1{,}5)$.

Aunque no es acotada la región factible, estamos minimizando $C = 3x + 4y$, cuyas coeficientes son no negativos.

La siguiente tabla muestra el valor de la función a optimizar C en cada punto de esquina:

Punto	$C = 3x + 4y$	
$(1, 1{,}5)$	$3(1) + 4(1{,}5) = 9$	mínimo
$(4, 0)$	$3(4) + 4(0) = 12;$	

Entonces, la solución es $x = 1, y = 1{,}5$, que da $C = 9$ como el valor mínimo.

Los puntos del plano que cumplen el sistema de desigualdades forman un recinto **convexo acotado (poligonal) o no acotado**, llamado **región factible** del problema.

Todos los puntos de dicha región cumplen el sistema de desigualdades. Se trata de buscar, entre todos esos puntos, aquel o aquellos que hagan el valor de $F(x, y)$ máximo o mínimo, según sea el problema.

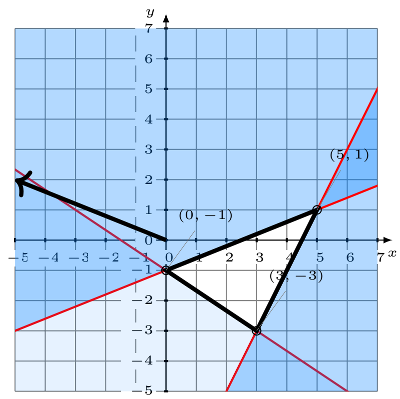
Los puntos de la región factible se denominan **soluciones factibles**.

De todas esas soluciones factibles, aquellas que hacen óptima (máxima o mínima) la función objetivo se llaman soluciones óptimas.

■

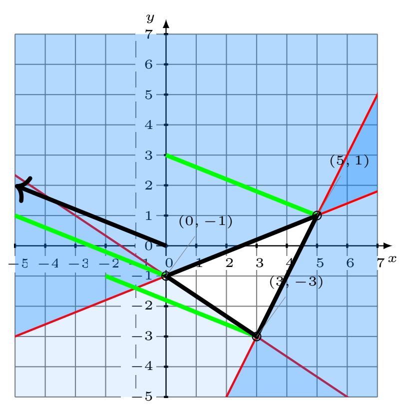
Ejemplo:

Maximizar la función $F(x, y) = 2000x + 5000y$ sujeta a las restricciones:
$2x + 3y \geq -3$
$2x - y - 9 \leq 0$
$2x - 5y - 5 \geq 0$ La región factible en este caso es:



Solucionando los sistemas dados por las rectas $\left.\begin{array}{c} 2x + 3y = -3 \\ 2x - y = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + 3y = 3 \\ 4y = -12 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = -3; x = 3$.Los vértices son los puntos $(3, -3)(0, -1)$ y $(5, 1)$.

Como la función es $F(x, y) = 2000x + 5000y$, el vector director es $v = (-5000, 2000)$, que tiene la misma dirección que el $v = (-5, 2)$. Se trata ahora de trazar paralelas al vector que pasen por los vértices anteriores, es decir:



Se observa gráficamente que de las tres paralelas trazadas, la que corta al eje y en un punto mayor es la que pasa por el punto $(5, 1)$, que por tanto será la solución óptima al problema de máximos planteado.

Para saber cuál es este valor ,máximo sustituimos en la función:
$F(5, 1) = 20005 + 50001 = 10000 + 5000 = 15000$
Luego la función tiene su solución óptima en (5,1) donde toma el valor 15000.

Forma algebraica Sustituir cada uno de los vértices de la región en la función objetivo. La solución óptima vendrá dada por aquel que tome el mayor (o menor) valor.

De esta forma sustituyendo:
$F(5, 1) = 2000 \cdot 5 + 5000 \cdot 1 = 10000 + 5000 = 15000$
$F(0, -1) = 2000 \cdot 0 + 5000(-1) = 0 - 5000 = -5000$
$F(3, -3) = 2000 \cdot 3 + 5000(-3) = 6000 - 15000 = -9000$
Vemos que el valor máximo se alcanza para el vértice $(5, 1)$ y que dicho valor es 15. La misma solución que se obtenía antes.

Ejemplos:

1. Maximizar $F(x, y) = 4x + 5y$ sujeto a:

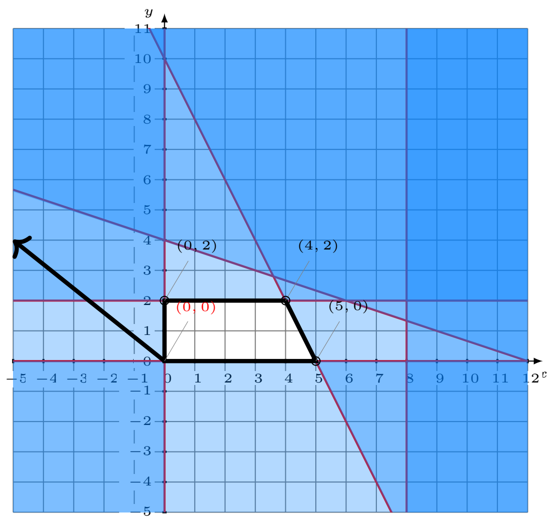
   $2x + y \leq 10$

   $x + 3y \leq 12$

   $0 \leq x \leq 8$

   $0 \leq y \leq 2$

   La región factible es



Para hallar los vértices, solucionamos los sistemas:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y = 10 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + 3y = 3 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 2; x = 4.$$

La recta $2x + y = 10$ y $x + 3y = 12$ no tienen un punto de corte dentro de la región factible.

Los vértices son $(0, 0), (5, 0), (4, 2)$ y $(0, 2)$

Forma algebraica Sustituir cada uno de los vértices de la región en la función objetivo. La solución óptima vendrá dada por aquel que tome el mayor valor.

De esta forma sustituyendo:

$F(5, 0) = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 20 + 5 = 25$

$F(0, 0) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$F(0, 2) = 4 \cdot 0 + 5(2) = 10$

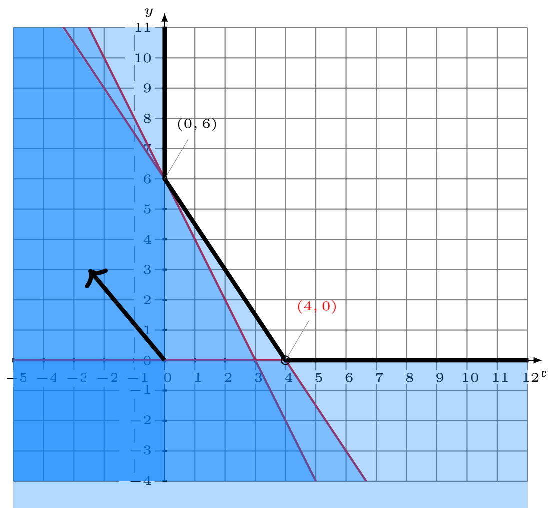
$F(4, 2) = 4 \cdot 4 + 5 \cdot (2) = 26.$

La solución es $x = 4; y = 2$

2. Minimizar $F(x, y) = 12x + 10y$ sujeto a:

   $3x + 2y \geq 12; 10x + 5y \geq 30; x \geq 0; y \geq 0.$

   La región factible es



Forma algebraica Sustituir cada uno de los vértices de la región en la función objetivo. La solución óptima vendrá dada por aquel que tome el mayor valor.

De esta forma sustituyendo:

$F(4, 0) = 12 \cdot 4 + 10 \cdot 0 = 48$

$F(0, 6) = 12 \cdot 0 + 10 \cdot 6 = 60;$

La solución es $x = 4; y = 0$

3. Maximizar $F(x, y) = 12x + 8y$ sujeto a:

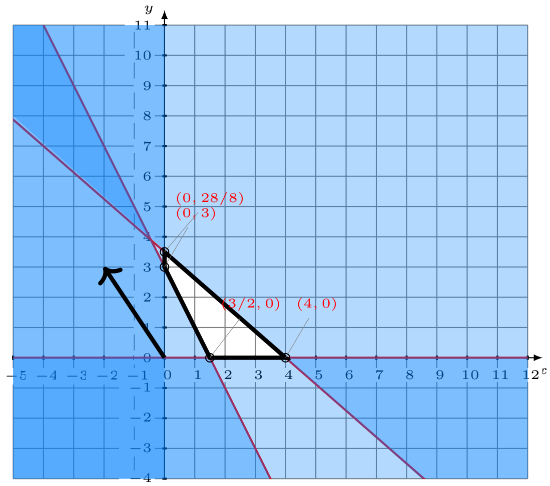
   $4x + 2y \leq 6$

   $7x + 8y \leq 28$

   $x \geq 0;$

   $y \geq 0.$

   La región factible es:



   Forma algebraica: Sustituir cada uno de los vértices de la región en la función objetivo. La solución óptima vendrá dada por aquel que tome el mayor valor.

   De esta forma sustituyendo:

   $F(4, 0) = 12 \cdot 4 + 8 \cdot 0 = 48$

   $F(\frac{3}{2}, 0) = \frac{3}{2} \cdot 12 + 8 \cdot 0 = 18;$

   $F(0, \frac{28}{8}) = \frac{28}{8} \cdot 8 = 28;$

   $F(0, 3) = 3 \cdot \frac{28}{8} = 10{,}5;$

   La solución es $x = 4; y = 0$

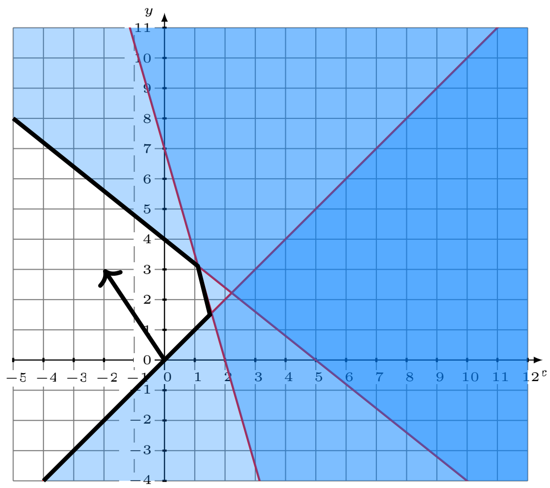
Algunos ejemplos de casos extremos

Puede ocurrir que la solución óptima no sea única, e incluso que no exista, como en los ejemplos siguientes:

4. Minimizar $F(x, y) = 12x + 8y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ 7x + 2y \geq 14 \\ x \leq y \end{cases}$$

La región factible es:

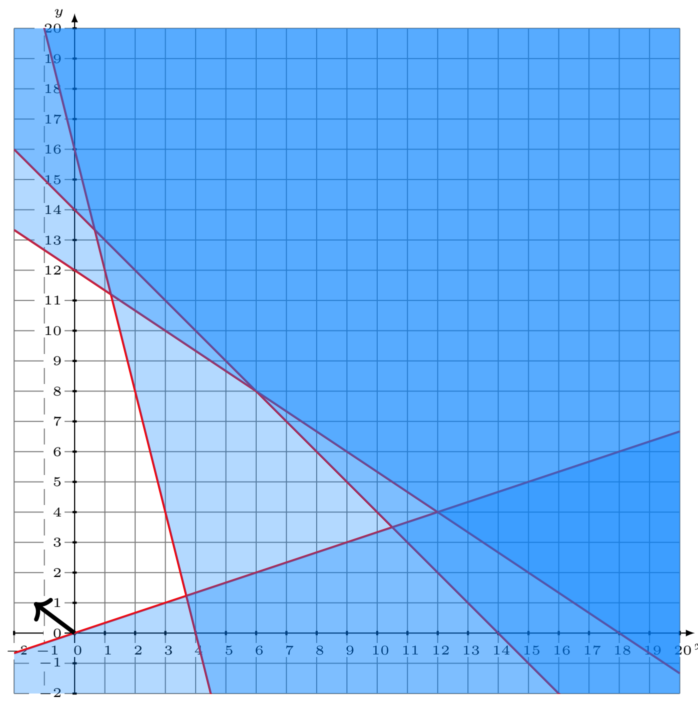


No existe el mínimo de esta función .El recinto no está acotado y la función $F(x, y) = 12x+8y$ no alcanza un mínimo nunca.

5. Maximizar $g(x,y) = 3x + 4y$ sujeta a las rectricciones:

$$\begin{cases} x + y >= 14 \\ 2x + 3y >= 36 \\ 4x + y >= 16 \\ x - 3y >= 0. \end{cases}$$

Si representamos la región factible:



Observemos que la región factible es NO acotada superiormente.

Si aplicamos el método geométrico, debería trazar paralelas al vector director por los vértices, pero como la región en no acotada, dichas rectas son cada vez mayores al trazarlas sobre los puntos de la recta t, que son soluciones factibles. Por tanto el problema no tiene solución.

En general, un problema de máximos no tiene solución si la región factible no está acotada superiormente, y un problema de mínimos no tiene solución si la región no está acotada inferiormente.

6. También puede tener el problema infinitas soluciones:

   Minimizar $g(x,y) = 3x + 3y$ sujeta a las restricciones

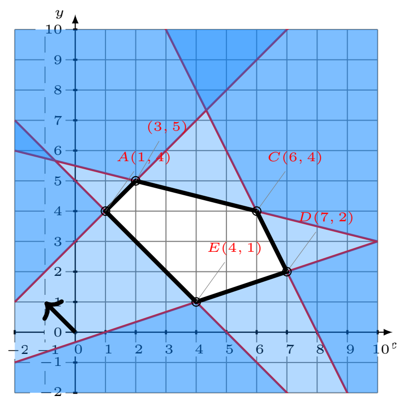
   $x + y >= 5$

   $y \leq x + 3$

   $3y - x >= -1$

   $y + 2x \leq 16$

   $4y + x \leq 22$



   Los vértices respectivos son: $A = (1,4), B = (2,5), C = (6,4), D = (7,2)$ y $E = (4,1)$. Si utilizamos el método gráfico, obtenemos que el segmento AE es paralelo al vector de la función. Como buscamos el valor mínimo, todos los puntos comprendidos entre A y E sirven, es decir, hay infinitas soluciones.

   Si utilizamos el método algebraico:g(x,y)=3x+3y, luego:

   A : $g(1,4) = 3 + 12 = 15$ mínimo

   $B : g(2,5) = 6 + 15 = 21$

   $C : g(6,4) = 18 + 12 = 30$

   D : $g(7,2) = 21 + 6 = 27$

   E : $g(4,1) = 12 + 3 = 15$ mínimo

   Observamos que el valor mínimo se toma en A y en E, y por tanto en todos los puntos comprendidos entre ellos, es decir, hay infinitas soluciones.

Aplicación a problemas concretos

El verdadero valor de las técnicas de la programación lineal consiste en poder aplicarlas a problemas reales.

Para resolver estos problemas se deben seguir los siguientes pasos, a la vez que vemos como se aplicaría a un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Una fábrica de muebles fábrica dos tipos de sillones, S_1y S_2. La fábrica cuenta con dos secciones; carpintería y tapicería.

Hacer un sillón de tipo S_1 requiere 1 hora de carpintería y 2 de tapicería, mientras que uno de tipo S_2 requiere 3 horas de carpintería y 1 de tapicería.

El personal de tapicería trabaja un total de 80 horas, y el de carpintería 90.

Las ganancias por las ventas de S_1 y S_2 (unidad) son, respectivamente 60 y 30 euros. Calcular cuántos sillones de cada tipo hay que hacer para maximizar las ganancias.

Solución

Este es un problema típico en el que hay que usar las técnicas de programación lineal. Intentaremos seguir el siguiente esquema:

1. Leer el enunciado , determinar la función objetivo y definir las variables.

   En este caso, queremos hacer máximo el beneficio, es decir, queremos maximizar una función.

   Como queremos determinar las cantidades de sillones S_1 y S_2 respectivamente, llamemos x=nº de unidades de S_1 e y=nº de unidades de S_2.

   La función beneficio a maximizar será: $B(x, y) = 60 \cdot x + 30 \cdot y$, que es la función objetivo.

   2. Reordenar los datos del problema y escribir las inecuaciones correspondientes.

2. En este paso es conveniente el uso de tablas:

Tiempo	Carpintería	Tapicería
S_1	1	2
S_2	3	1
Disponible	90	80

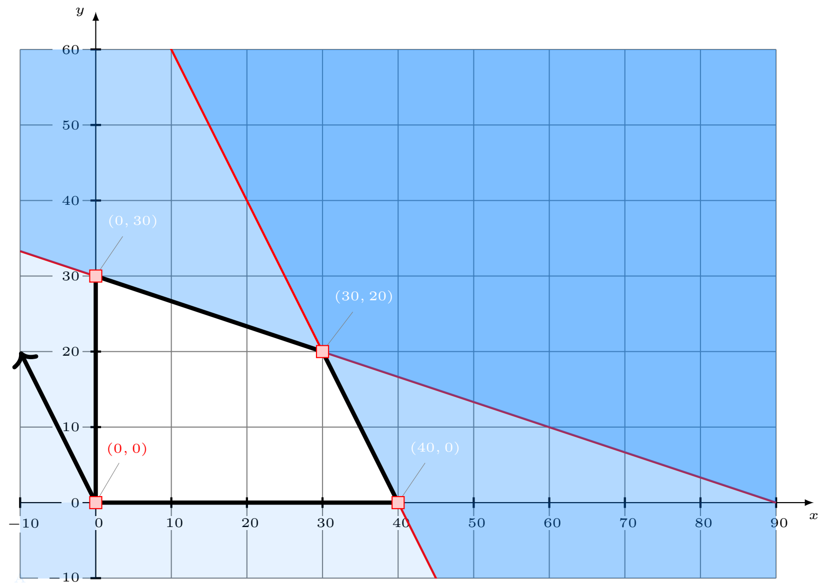
   De aquí se deduce que:

   $$\begin{cases} x + 3y <= 90 \\ 2x + y \leq 80 \\ y\ además \\ x >= 0 \\ y >= 0 \end{cases}$$

   pues el nº de unidades producidas no puede ser negativo.

   Ya tenemos por tanto las restricciones.

3. Representar gráficamente la región factible, calcular sus vértices y el vector si usamos el método geométrico.



En este caso, representando la región factible:

Siendo los vértices $A = (0, 0), B = (0, 30), C = (30, 20), D = (40, 0)$.

El vector será $(-30, 60)$, equivalente a $(-10, 20)$.

Gráficamente se observa que la solución no es única ya que la recta $2x + y = 80$ es paralela al vector$(-30, 60)$. Hay infinitas soluciones en el lado correspondiente CD, sobre la recta $2x + y = 80$, desde que x vale 30 hasta que vale 40, todas las soluciones son válidas

4. Segunda forma de encontrar la solución : Sustituir las coordenadas en la función objetivo y dar la solución correcta.

   En este caso se obtiene:

   $B(0, 0) = 0$; $B(0, 30) = 900$; $B(30, 20) = 2400$; $B(40, 0) = 2400$ con lo cuál hay infinitas soluciones en el segmento $(40, 0)$ y $(30, 20)$ y el beneficio que se obtiene en cualquier punto de ese segmento es 2400 euros.

5. Analizar la solución obtenida en el contexto del problema: ¿tiene sentido?.

   Debemos interpretar que en el contexto del problema no todas las soluciones son válidas, sino que sólo sirven soluciones enteras, es decir, no se pueden fabricar, por ejemplo $3'8$ sillones del tipo S_1. Las soluciones con sentido vendrían dadas por:

S_1	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
S_2	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0

   Encontramos por tanto sólo 11 soluciones que son las de la tabla.

   En cualquiera de estas soluciones el beneficio es de 2400 euros, que es el máximo bajo las condiciones del problema.

El problema del transporte.

Es uno de los problemas que dieron lugar a la programación lineal.
Un ejemplo típico sería el siguiente:

Ejemplo:

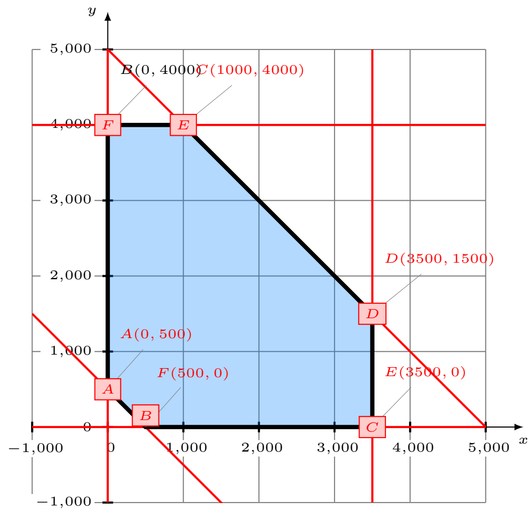
Una empresa tiene 2 plantas de producción ($P1$ y $P2$) de cierto artículo que vende en 3 ciudades (C_1, C_2 y C_3). En P_1 produce 5000 unidades, y en P_2 7000 unidades. De estas 12000 unidades las vende así: 3500 es C_1, 4000 en C_2 y 4500 en C_3. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a las ciudades son:

Envíos	Hasta C_1	Hasta C_2	Hasta C_3
Desde P_1	3	2.5	3.5
Desde P_2	2.25	3.75	4

Determina el nº de artículos que debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.
Para problemas de este tipo necesitamos una nueva variable.
Sea x=unidades de P_1 a C_1, y=unidades de P_1 a C_2 y z=unidades de P_1 a C_3.
Tiene que verificarse entonces que $x + y + z = 5000$. Si desde P_1 a C_1 se envían x unidades, como en C_1 necesitan 3500, desde P_2 se mandarán a C_1: $3500 - x$. Razonando del mismo modo con y y z, se obtiene la tabla:

Envíos	Hasta C_1	Hasta C_2	Hasta C_3
Desde P_1	x	y	$z = 5000 - x - y$
Desde P_2	$3500 - x$	$4000 - y$	$4500 - z = 4500 - (5000 - x - y)$

Hemos sustituido z por $5000 - y - x$, porque $x + y + z = 5000$ y así transformamos las 3 incógnitas en sólo 2.
Para obtener las restricciones imponemos que cada cantidad ha de ser mayor o igual que cero, es decir:
$x \geq 0$;$3500 - x \geq 0$;$y >= 0$;$4000 - y \geq 0$;$5000 - x - y \geq 0$;$-500 + x + y \geq 0$
Por tanto el sistema de inecuaciones es:
$x \geq 0$;
$x \leq 3500$;
$y >= 0$;
$y \leq 4000$;
$x + y \leq 5000$;
$x + y \geq 500$
Como se trata de minimizar costes, la función objetivo es:
$C(x, y) = 3 \cdot x + 2'5 \cdot y + 3'5 \cdot (5000 - x - y) + 2'25 \cdot (3500 - x) + 3'75 \cdot (4000 - y) + 4 \cdot (-500 + x + y)$
$C(x, y) = 1'25 \cdot x - 0'75 \cdot y + 22625$
Dibujando la región factible:



Los vértives de la región feactible , resolviendo sistemas de ecuaciones dos a dos :
$A = (0, 500), B = (500, 0), C = (3500, 0), D = (3500, 1500), E = (1000, 4000) y F = (0, 4000),$
Sustituyendo los valores de cada vértice en la función objetivo:
$C(0, 500) = 22250;$
$C(0, 4000) = 19625;$
$C(1000, 4000) = 20875$;
$C(3500, 1500) = 25875;$
$C(3500, 0) = 27000;$
$C(500, 0) = 23250$
El mínimo se da en F, cuando $x = 0$ e $y = 4000$.
Es decir, las unidades a distribuir son:

Envíos		Hasta C_1	Hasta C_2	Hasta C_3
Desde P_1		0	$4000 - y$	1000
Desde P_2		3500	0	3500

Ejemplo:

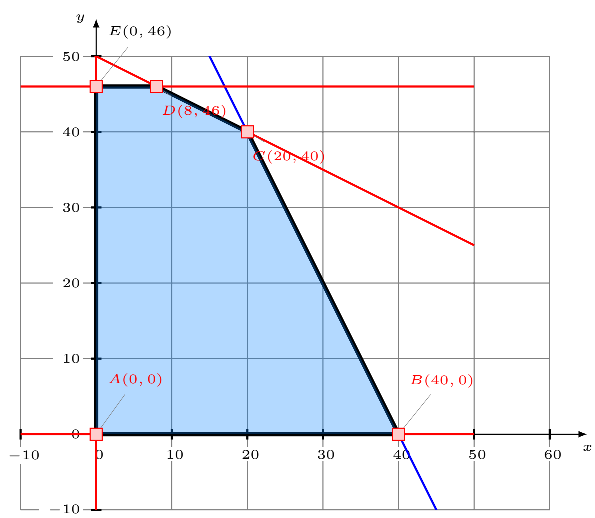
(Propuesto en Selectividad). Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

Solución

La información se resume en la siguiente tabla:

Tarta	cantidad	Masa	Crema	Nata	Beneficio
Chocolate	x	x	$2x$		$10x$
Chocolate y crema	y	$2y$	y	y	$12y$
disponible		100	80	46	

La función objetivo es Maximizar $B(x, y) = 10x + 12y$
Las restricciones son
$x \geq 0$; $y >= 0$; $y \leq 46$; $x + 2y \leq 100$; $2x + y \leq 80$



El beneficio en cada vértices es:

$B(0, 0) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 0$=0; $B(40, 0) = 10 \cdot 40 + 12 \cdot 0 = 400$; $B(20, 40) = 10 \cdot 20 + 12 \cdot 40 = 680$; $B(8, 46) = 10 \cdot 8 + 12 \cdot 46 = 552$; $B(0, 46) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 46 = 632$

El máximo es de 680€, y se da cuando se fabrican 20 tartas de chocolate y 40 de chocolate y nata.

Ejemplo:

(Propuesto en Selectividad). Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante. El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

Solución

Tabla resumen:

pintura	kilos	A	B	Beneficio
mate	x	$0{,}4x$	$0{,}6x$	$4x$
brillo	y	$0{,}2y$	$0{,}8y$	$5y$
disponible		200	500	

Función beneficio $B(x, y) = 4x + 5y$

Las restricciones son

$x \geq 0$; $y >= 0$;$x \geq 200$; $y \geq 300$; $0{,}4x + 0{,}2y \leq 200$; $0{,}6x + 0{,}8y \leq 500$

La región factible es:

El beneficio en cada vértices susituir en $B(x, y) = 4x + 5y$

pintura	$B(x, y) = 4x + 5y$
A(200, 300)	2300
B(200, 475),	3175
C(300, 400)	3200
D(350, 300)	2900

El máximo es de 3200€, y se da cuando se fabrican $300kg$ de pintura mate y $400kg$ de pintura brillante

Ejemplo

Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución

Llamamos: $x=$ kilos de la mezcla 1, (mezcla a partes iguales)

$y=$ kilos de la mezcla 1, (mezcla 1 a 3)

En la mezcla 1, los dos tipos de café van a partes iguales; luego en x kilos de esta mezcla hay $x/2$ de café colombiano y $x/2$ de café brasileño.

En la mezcla 2, la proporción es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño; luego en y kilos de esta mezcla hay $\frac{y}{4}$ de café colombiano y $\frac{3y}{4}$ de café brasileño.

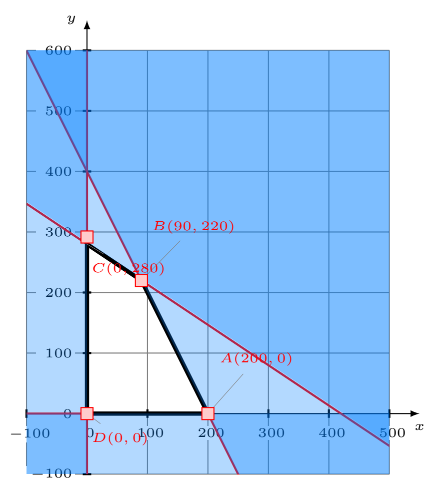
	Café		
	colombiano	brasileño	
Mezcla A	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	15
Mezcla B	$\frac{y}{4}$	$\frac{3y}{4}$	10

Las restricciones son:

El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano $\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{y}{4} \leq 100 \Rightarrow 2x+y \leq 400$

El vendedor dispone de 210 kilos de café brasileño $\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{3y}{4} \leq 210 \Rightarrow 2x+3y \leq 840$ y además $x \geq 0; y \geq 0$.

La función del beneficio es $f(x,y)=15x+10y$ a maximizar.



Para hallar los vértices, solucionamos los sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=400 \\ 2x+3y=840 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=400 \\ -2y=-440 \end{array}\right\} \Longrightarrow y=220; x=90.$$

El máximo de la función $f(x,y)=15x+10y$ en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculamos los valores de la función en los vértices:

$f(0,0)=0$

$f(90,220)=15\cdot 90+10\cdot 220=3550$ Máximo

$f(200,0)=15\cdot 200=3000$

$f(0,280)=10\cdot 280=2280$

El máximo se alcanza en el punto $(900,220)$

Por tanto, para obtener el ingreso máximo debe producir 90 kg de la primera mezcla y 220 kg de la segunda y el ingreso máximo sería de 3550€.

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución

Convenimos llamar $x =$ nº de cajas del tipo A ;$y =$ nº de cajas del tipo B

La función objetivo es $f(x, y) = 7x + 5y$

Construimos una tabla resumen con los datos:

	Tarros de Miel			Beneficios €/caja
	romero	azahar	multifloral	
A	2	2	1	7
B	1	2	2	5

Las restriciones sacados del problema:

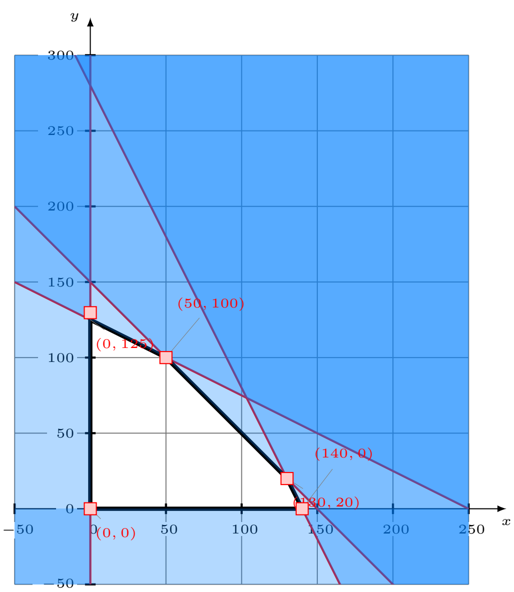
la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero $2x + y \leq 280$

la empresa dispone de 300 tarros de miel de azahar $2x + 2y \leq 300$

la empresa dispone de 250 tarros de miel multifloral $1x + 2y \leq 250$

Además x e y son números naturales.

Construimos la región dibujando las correspondientes rectas y resolviendo los sitemas para hallar los puntos de corte de dichas rectas entre si.



Para hallar los vértices, solucionamos los sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 300 \\ x + 2y = 250 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + y = 300 \\ 2y = 200 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 100; x = 50.$$

Los vértices de la región factible son: $(0, 0), (0, 125), (50, 100), (130, 20)$ y $(140, 0)$.

El máximo de la función $f(x, y) = 7x + 5y$ en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculamos los valores de la función en los vértices:

$f(0, 0) = 0$; $f(0, 125) = 5 \cdot 125 = 625$

$f(130, 20) = 7 \cdot 130 + 5 \cdot 20 = 1010$ Máximo

$f(50, 100) = 7 \cdot 50 + 5 \cdot 100 = 850$

$f(140, 0) = 7 \cdot 140 = 980$.

El máximo se alcanza en el punto A=$(130, 20)$