Departamento
de Matemáticas

2025

Problemas Sistemas Ecuaciones Lineales resueltos

by S3r4

Bachillerato II CCSS

IES Dionisio Aguado (Fuenlabrada)

1. **En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del articulo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35.20 euros. Finalmente, si no adquiere el artíıculo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determinar el precio de cada artículo.**

   Solución

   Nombremos las incógnitas: x : Precio del artículo A (€) ; y : Precio del artículo B (€) ;z : Precio del artículo C (€)

   Los precios de la segunda unidad de cada producto serían:

   A tiene un descuento del 60 %$\rightarrow x \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}4x$

   B tiene un descuento del 75 % $\rightarrow y \cdot (1 - 0{,}75) = 0{,}25y$

   C tiene un descuento del 50 % $\rightarrow z \cdot (1 - 0{,}5) = 0{,}5z$

ARTÍCULO	Precio 1ª unidad	Precio 2ª unidad	Comprando dos unidades
A	x	$0,4x$	$1{,}4x$
B	y	$0,25y$	$1{,}25y$
C	z	0.5z	$1{,}5z$
TOTAL	26	$35,20 - 26 = 9,20$	35,2

   Planteemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ 1{,}4x+1{,}25y+1{,}5z=35{,}2 \\ 1{,}25y+z=y+1{,}5z \end{array}\right. \overset{\text{Operando y}}{\underset{\text{quitando decimales}}{\Rightarrow}} \left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ 140x+125y+150z=3520 \\ y-2z=0 \end{array}\right.$$

   Resolvemos por el método de Gauss $A|A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 140 & 125 & 150 & 3520 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$[F_3 - ((-1)/15) * F_2 - > F_3] F_2 - 140 * F_1 - > F_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -15 & 10 & -120 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 8 \end{pmatrix}$$

   De la ecuación 3 del sist (1) encontramos con la variable z: $\frac{(-4)}{3} * z = -8; z = 6$

   De la ecuación 2 del sist (1) encontramos con la variable y: $-15y = -120 - 10 \cdot z = -120 - 10 \cdot 6 = -180; y = 12$

   De la ecuación 1 del sist $x = 26 - y - z = 26 - 12 - 6 = 8$

   La respuesta: $x = 8; y = 12; z = 6$

   La solución general: $X = (8, 12, 6)$

2. **Un dietista veterinario ha establecido la alimentacion diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.**

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución:

Nombremos las incógnitas.

x : gramos de grasa

y : gramos de carbohidratos

z : gramos de proteína

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 9x+4y+4z=2500 \\ 1y-2z=40 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 9 & 4 & 4 & 2500 \\ 0 & 1 & -2 & 400 \end{pmatrix} \underset{F_3-((-1)/5)*F_2'\rightarrow F_3'}{\overset{F_2-9*F_1\rightarrow F_2'}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -5 & -5 & -2000 \\ 0 & 0 & -3 & -360 \end{pmatrix}$$

El sistema reducido queda así $\begin{cases} x+y+z=500 \\ 5y+5z=2000 \\ -3z=-360 \end{cases}$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z :

$$-3z=-360; z=120$$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable y:

$$-5y=-2000+5z=-2000+5\cdot 120=-1400$$

; $y=280$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x :

$$x=500-y-z=500-280-120=100$$

La respuesta:

$$x=100; y=280; z=120$$

3. **En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camion más de tipo A para igualar al numero de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un unico viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo? La suma de las cifras de un número comprendido entre 100 y 999 es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198. Si se intercambian las de las unidades y las decenas, el número aumenta en 36. ¿Cuál es este número?**

   Solución

   Nombremos las incógnitas.

   x : Número de camiones tipo A

   y : Número de camiones tipo B

   z : Número de camiones tipo C

   Planteamos

$$\left\{\begin{array}{c} 14x + 24y + 28z = 302 \\ 1 + x = y + z \\ 0{,}1 \cdot 24y = \frac{1}{7}28z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 7x + 12y + 14z = 151 \\ x - y - z = 1 \\ 3y - 5z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$A/A* = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 14 & 151 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - (1/7) * F_1 \to F_2' \\ \Rightarrow \\ F_3 - \frac{-21}{19} * F_2' \to F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & 12 & 14 & 151 \\ 0 & -\frac{19}{7} & -3 & -\frac{158}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{158}{19} & -\frac{474}{19} \end{pmatrix}$$

   El sistema reducido queda así $\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 26 \\ -19y - 21z = -158 \\ 158z = 474 \end{array}\right.$

   De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z: $-158z = -474; z = 3$

   De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable $y : (-19) * y - 21z = (-158)$; $y = 5$

   De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x: $7x = 151 - 12y - 14z = 151 - 12 * 5 - 14 * 3 = 49; x = 7$

   La respuesta: $x = 7; y = 5; z = 3$

   La solución general: $X = (7, 5, 3)$

4. **Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.**

	oro %	**Plata %**
A	**100**	**0**
B	**75**	**15**
C	**60**	**22**

Se quiere obtener un lingote de 25 **gramos con una proporción del** 72 % **de oro y una proporción del** 16 % **de plata, tomando** x **gramos de** A**,** y **gramos de B y z gramos de C. Determinar las cantidades** x, y, z**.**

Solución

Nombremos las incógnitas.

x : Número de gramos de A

y : Número de gramos de B

z : Número de gramos de C

El lingote tendrá $0{,}72 \cdot 25 = 18$ gramos de oro y $0{,}16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata.

Teniendo en cuenta las proporciones de la tabla planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=25 \\ x+0{,}75y+0{,}6z=18 \\ 0{,}15y+0{,}22z=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=25 \\ 100x+75y+60z=1800 \\ 15y+22z=400 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=25 \\ 20x+15y+12z=360 \\ 15y+22z=400 \end{array}\right.$$

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 20 & 15 & 12 & 360 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - 20F_1 -> F_2' \\ \Longrightarrow \\ F_3 + 3F_2' -> F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{pmatrix}$$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z:

$$-2z = -20; z = 10$$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable

$$y : (-5) * y - 8z = -140; y = 12$$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x:

$$x + y + z = 25; x = 3$$

La respuesta: $x = 3; y = 12; z = 10$

La solución general: $X = (3, 12, 10)$

5. **Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Ademas, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el numero de días que han estado en cada uno de los tres países.**

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución

Nombremos las incógnitas.

x : Número de días de estancia en Francia

y : Número de días de estancia en Alemania

z : Número de días de estancia en Suiza

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=15 \\ x=2z \\ x\cdot(20+20)+y\cdot(25+15)+z\cdot(30+25)+8\cdot 15=765 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=15 \\ x-2z=0 \\ 8x+8y+11z=129 \end{array}\right.$$

a) Resolvemos por el método de Gauss

$$(A/A^*)=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & 11 & 129 \end{array}\right)[F_3-8F_1->F_3']F_2-F_1->F_2'\Longrightarrow\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z:

$$3z=9; z=3$$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable

$$y:(-1)*y-3z=-15; y=6$$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x:

$$x+y+z=15; x=6$$

La respuesta: $x=6; y=6; z=3$

La solución general: $X=(6,6,3)$

6. **La aerolínea Air, para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta** 12 **plazas de Clase Preferente (P), a** 250 **euros cada una,** 36 **plazas de Clase Turista (T), a** 150 **euros cada una, y** 72 **plazas de Clase Económica (E), a** 100 **euros cada una. Se sabe que ha vendido el** 90 % **del total de las plazas, recaudando un importe de** 13800 **euros.**

   a) **(0.25 puntos) Determine el numero total de plazas vendidas.**

   b) **(2.25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el numero de billetes vendidos de cada clase y cuanto dinero se ha recaudado de cada clase.**

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución

Nombremos las incógnitas.

$x \equiv$ Nº de billetes vendidos de la clase (P)

$y \equiv$ Nº de billetes vendidos de la clase (T)

$z \equiv$ Nº de billetes vendidos de la clase (E)

a) Número de plazas vendidas $= 0,9 \cdot (12 + 36 + 72) = 108$

b) Escribimos el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que se han vendido 108 plazas, y además la recaudación ha sido de 13800€ y que se han vendido el triple de (T) que de (P).

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 108 \\ 250x + 150y + 100z = 13800 \\ y = 3x \end{array} \right. \overset{\frac{1}{50}F_2}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 108 \\ 5x + 3y + 2z = 276 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{[}{F}_3 - 3F_1 -> F_3'] F2 - 5F_1 -> F_2' \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \end{pmatrix} \overset{[}{F}_3 - 2F_2 -> F_3'] \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & 0 & 3 & 204 \end{pmatrix}$$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z: $3z = 204; z = 68$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable $y(-2) * y - 3z = -264; y = 30$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x: $x + y + z = 108; x = 10$

La respuesta: $x = 10; y = 30; z = 68$

La solución general: $X = (10, 30, 68)$

7. **Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Ademas, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.**

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B)

Solución

Nombremos las incógnitas

$x \equiv$ Edad de Pablo

$y\equiv$ Edad de Alejandro

$z \equiv$ Edad de Alicia

En el reparto proporcional a las edades, cada primo recibirá $\frac{9450}{45} = 210$€ por cada año de edad que tenga

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=45 \\ x+y=2z+3 \\ 210x-210z=420 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=45 \\ x+y-2z=3 \\ x-z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{[}{F}_3 - F_1 -> F_3'] F2 - F_1 -> F_2' \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \\ 0 & -1 & -1 & -43 \end{pmatrix}$$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable z:

$$-3z = -42; z = 14$$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable y

$$(-1) * y - z = -43; y = 15$$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x:

$$x + y + z = 45; x = 16$$

La respuesta: $x = 16; y = 15; z = 14$. Una vez sabemos las edades, repartimos el premio.

La solución general: $X = (16 \cdot 210, 15 \cdot 210, 14 \cdot 210)$=(3360€, 3150€, 2940€)

8. **Pilar compra 200 acciones de la empresa A, 150 de B y 100 de C y paga 3,300 € mientras que Juan gasta 3,750€ por la compra de 50 acciones de A, 120 de B y 240 de C. con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?**

   Solución

   Nombremos las incógnitas

   $x \equiv$ Precio de las acciones de la empresa A

   $y\equiv$ Precio de las acciones de la empresa B

   $z \equiv$ Precio de las acciones de la empresa C

   Entonces:

   Planteamos el sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} 200x + 150y + 100z = 3300 \\ 50x + 120y + 240z = 3750 \end{cases}$$

   Construimos la matriz del sistema

   $$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 & 3300 \\ 50 & 120 & 240 & 3750 \end{pmatrix}$$

   El rango de la matriz del sistema es 2 ya que $\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} \neq 0$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

   Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

   $$\begin{cases} 200x + 150y + 100z = 3300 \\ 50x + 120y + 240z = 3750 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 5x + 12y + 24z = 375 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 33y + 86z = 1170 \end{cases}$$

   Con lo que $\begin{cases} x = & \frac{16\lambda-111}{11} \\ y = & \frac{1170-86\lambda}{33} \\ z = & \lambda \end{cases}$

   La solución general: $X = (\frac{16\lambda-111}{11}, \frac{1170-86\lambda}{33}, \lambda)$

   No es posible determinar los precios de las acciones. Si las acciones deben tener un valor entero por precio, el valor de la acción de la empresa C solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa A valen 3 € y las de B 12 €.

9. **En una caja hay monedas de tres tipos: de 2 €, de 1 € y de 50 céntimos. Se sabe que, en total, hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 €. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas? Si la respuesta es afirmativa, encuentra el número de cada uno de los tipos de moneda. Si la respuesta es negativa, encuentra, al menos, dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos y de manera que el valor total sea de 40.**

(País Vasco. Junio 2002. Bloque E. Cuestión E)

Solución

Nombremos las incógnitas

$x \equiv$ número de monedas de 2 €

$y\equiv$ número de monedas de 1 €

$z \equiv$ número de monedas de 50 céntimos

Entonces:

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{cases}$$

Construimos la matriz del sistema

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 2 & 1 & 0{,}5 & 40 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz del sistema es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{cases} \overset{F_1-F_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 33 \\ -x + 0{,}5z = -7 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = & 7 + 0{,}5\lambda \\ y = & 26 - 1{,}5\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$ Como el número de cada tipo de moneda debe ser entero positivo hay dos soluciones posibles

Primera respuesta 8 monedas de 2 €, 23 de 1 € y 2 de 50 céntimos, o bien,

segunda respuesta 9 monedas de 2 €, 20 de 1 € y 4 de 50 céntimos. Cualquier otro valor o es negativo o decimal.

10. **Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.(Madrid. Junio 2002. Opción A)**

Solución

Nombrando incógnitas:

$x \equiv$ "Edad de la madre"

$y \equiv$ "Edad del hijo mayor"

$z \equiv$ "Edad del hijo menor"

Rellenamos la tabla de las edades teniendo en cuenta que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre habrán pasado $x - y$ años.

	Edad hoy	Hace 14 años	Dentro de 10 años	Dentro de $x - y$ años
Madre	x	$x - 14$	$x + 10$	$x + (x - y) = 2x - y$
Hijo mayor	y	$y - 14$	$y + 10$	$y + (x - y) = x$
Hijo menor	z	$z - 14$	$z + 10$	$z + (x - y) = x - y + z$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 14 = 5 \cdot (y - 14 + z - 14) \\ x + 10 = y + 10 + z + 10 \\ x - y + z = 42 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{array}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$(A/A^*) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2' \\ \Longrightarrow \\ F_3 - F_1 \to F_3' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 116 \\ 0 & 4 & 6 & 168 \end{pmatrix}$$

$$[F_3 - F_2 \to F_3'] \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 116 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{pmatrix}$$

De la ecuación 3 del sistema encontramos con la variable z:

$$2z = 32; z = 16$$

De la ecuación 2 del sistema encontramos con la variable y

$$4 * y = 136 - 4z = 136 - 4 * 16 = 72; y = 18$$

De la ecuación 1 del sistema encontramos con la variable x:

$$x_1 = -126 + 5y + 5z = -126 + 5 * 18 + 5 * 16 = 44$$

La respuesta: $x = 44 : y = 18; z = 16$

La solución general: $X = (44, 18, 16)$

11. **Los precios de mis tres frutos secos favoritos son: almendras a** $6euros/kg$**; avellanas a** $16euros/kg$ **y cacahuetes a** $10euros/kg$**. En el supermercado he tomado algunos kilos de cada uno de estos frutos secos y he llenado una caja de** $9kilos$**, por la que he pagado** 90**€. En esta caja, la suma de los kilos de avellanas más los de cacahuetes es igual al doble de los kilos de almendras. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilos de cada fruto seco he comprado.**

Planteamiento del Sistema de Ecuaciones

Llamamos:

- x: los kilos de almendras,
- y: los kilos de avellanas,
- z: los kilos de cacahuetes.

De acuerdo con el enunciado, tenemos las siguientes ecuaciones:

1. El peso total de los frutos secos es de 9 kilos: $x + y + z = 9$

2. El coste total es de 90 euros. Los precios por kilo son: $6x+16y+10z = 90$

3. La suma de los kilos de avellanas y cacahuetes es igual al doble de los kilos de almendras: $y + z = 2x$

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 6x + 16y + 10z = 90 \\ y + z = 2x \end{cases}$

Paso 1: Representación del sistema en forma de matriz aumentada

Escribimos el sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 6 & 16 & 10 & | & 90 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Eliminación de Gauss

Fila 2: Hacer cero en la posición $(2, 1)$

Restamos 6 veces la fila 1 de la fila 2 para hacer cero el elemento en la posición $(2, 1)$:

$F_2 \to F_2 - 6F_1 \Rightarrow F_2 = (6, 16, 10, 90) - 6(1, 1, 1, 9) \Rightarrow F_2 = (6 - 6, 16 - 6, 10 - 6, 90 - 54) = (0, 10, 4, 36)$

Fila 3: Hacer cero en la posición $(3, 1)$

Sumamos 2 veces la fila 1 a la fila 3 para hacer cero el elemento en la posición $(3, 1)$:

$F_3 \to F_3 + 2F_1 \Rightarrow F_3 = (-2, 1, 1, 0) + 2(1, 1, 1, 9) \Rightarrow F_3 = (-2+2, 1+2, 1+2, 0+18) = (0, 3, 3, 18)$

La matriz resultante es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & 10 & 4 & | & 36 \\ 0 & 3 & 3 & | & 18 \end{pmatrix}$

Paso 3: Hacer cero en la posición $(3, 2)$

Para eliminar el 3 en la posición $(3, 2)$, restamos 3 veces la fila 2 de 10 veces la fila 3:

$F_3 \to 10F_3 - 3F_2 \Rightarrow F_3 = 10(0, 3, 3, 18) - 3(0, 10, 4, 36) \Rightarrow F_3 = (0, 30, 30, 180) - (0, 30, 12, 108)$

$$F_3 = (0-0, 30-30, 30-12, 180-108) = (0, 0, 18, 72)$$

Dividimos la fila 3 por 18 para que el pivote sea 1:$F_3 \to \frac{1}{18}F_3 \Rightarrow F_3 = (0, 0, 1, 4)$

La matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & 10 & 4 & | & 36 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Regresar hacia atrás para obtener las soluciones

De la fila 3:$z = 4$

De la fila 2: Sustituimos $z = 4$ en la segunda fila:

$10y + 4z = 36 \Rightarrow 10y + 16 = 36 \Rightarrow 10y = 20 \Rightarrow y = 2$

De la fila 1:

Sustituimos $y = 2$ y $z = 4$ en la primera fila: $x + y + z = 9 \Rightarrow x + 2 + 4 = 9 \Rightarrow x = 3$

Las soluciones son:

$$x = 3 \quad \text{(kilos de almendras)}$$

$$y = 2 \quad \text{(kilos de avellanas)}$$

$$z = 4 \quad \text{(kilos de cacahuetes)}$$

12. **Los alumnos de 2º de Bachillerato de un centro escolar votan entre tres destinos posibles para el viaje de fin de curso: Roma, Londres y París. El número total de votos es 120. El número de alumnos que quieren ir a Roma es el triple de la diferencia entre los que quieren ir a París y los que quieren ir a Londres. Además, el número de alumnos que quieren ir a París es la mitad de la suma de los que quieren ir a Roma y Londres.**

Solución

Planteamos:

- x es el número de alumnos que quieren ir a Roma,
- y es el número de alumnos que quieren ir a Londres,
- z es el número de alumnos que quieren ir a París.

Sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = 120 \tag{1}$$

$$x = 3(z - y) \tag{2}$$

$$z = \frac{1}{2}(x + y) \tag{3}$$

Paso 1: Transformación a la forma de matriz

Primero, reescribimos el sistema de ecuaciones en una forma más conveniente para la matriz:

De la ecuación (1): $x + y + z = 120$

De la ecuación (2): $x - 3z + 3y = 0$

De la ecuación (3): $x + y - 2z = 0$

Este sistema se puede expresar como la siguiente matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 1 & 3 & -3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Resolución del sistema por el método de Gauss

La matriz original es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 1 & 3 & -3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$

Operación 1: Hacer ceros debajo del primer elemento de la primera columna

Restamos la fila 1 de la fila 2 y la fila 3 de la fila 1.

- Fila 2: $F_2 \to F_2 - F_1 \Rightarrow (1, 3, -3, 0) - (1, 1, 1, 120) = (0, 2, -4, -120)$
- Fila 3: $F_3 \to F_3 - F_1 \Rightarrow (1, 1, -2, 0) - (1, 1, 1, 120) = (0, 0, -3, -120)$

La matriz resultante es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 0 & 2 & -4 & | & -120 \\ 0 & 0 & -3 & | & -120 \end{pmatrix}$

Operación 2: Simplificación de la fila 2

Dividimos la fila 2 entre 2: $F_2 \to \frac{1}{2}F_2 = (0, 1, -2, -60)$

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 0 & 1 & -2 & | & -60 \\ 0 & 0 & -3 & | & -120 \end{pmatrix}$

Operación 3: Hacer cero en la posición (1, 2)

Restamos la fila 2 de la fila 1:$F_1 \to F_1 - F_2 \Rightarrow (1, 1, 1, 120) - (0, 1, -2, -60) = (1, 0, 3, 180)$

La matriz es ahora: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 180 \\ 0 & 1 & -2 & | & -60 \\ 0 & 0 & -3 & | & -120 \end{pmatrix}$

Operación 4: Resolver para z

De la fila 3:$-3z = -120 \quad \Rightarrow \quad z = 40$

Operación 5: Resolver para y

De la fila 2:$y - 2z = -60 \quad \Rightarrow \quad y - 2(40) = -60 \quad \Rightarrow \quad y - 80 = -60 \quad \Rightarrow \quad y = 20$

Operación 6: Resolver para x

De la fila 1:$x + 3z = 180 \quad \Rightarrow \quad x + 3(40) = 180 \quad \Rightarrow \quad x + 120 = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 60$

Las soluciones son:

$$x = 60 \quad \text{(alumnos que quieren ir a Roma)},$$

$$y = 20 \quad \text{(alumnos que quieren ir a Londres)},$$

$$z = 40 \quad \text{(alumnos que quieren ir a París)}.$$

13. **Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores: Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.**

Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En

total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

a. Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa.

b. Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

Definimos:

x = Número de acciones compradas de la empresa A.

y = Número de acciones compradas de la empresa B.

z = Número de acciones compradas de la empresa C.

Las ecuaciones del problema son:

$20x + 25y + 40z = 7000$

$2x - y - z = 0$

$x + y + z = 255$

Resolución por el método de Gauss

Escribimos la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 2 & -1 & -1 & |0 \\ 20 & 25 & 40 & |7000 \end{bmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales hasta obtener una matriz triangular superior:

- Intercambiamos la fila 1 con la fila 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 2 & -1 & -1 & |0 \\ 20 & 25 & 40 & |7000 \end{bmatrix}$$

- Restamos $2F_1$ de F_2: $(2, -1, -1, 0) - 2(1, 1, 1, 255) = (0, -3, -3, -510)$
- Restamos $20F_1$ de F_3: $(20, 25, 40, 7000) - 20(1, 1, 1, 255) = (0, 5, 20, 1900)$
  Nueva matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & -3 & -3 & |-510 \\ 0 & 5 & 20 & |1900 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos F_2 por -1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & 3 & 3 & |510 \\ 0 & 5 & 20 & |1900 \end{bmatrix}$$

- Restamos F_2 de F_3: $(0, 5, 20, 1900) - (0, 3, 3, 510) = (0, 2, 17, 1390)$
  Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & 1 & 1 & |170 \\ 0 & 2 & 17 & |1390 \end{bmatrix}$$

- Restamos $2F_2$ de F_3: $(0, 2, 17, 1390) - 2(0, 1, 1, 170) = (0, 0, 15, 1050)$
- Despejamos z: $15z = 1050 \Rightarrow z = 70$.
- Sustituimos $z = 70$ en la segunda ecuación: $y + 70 = 170 \Rightarrow y = 100$.
- Sustituimos $y = 100, z = 70$ en la primera ecuación: $x + 100 + 70 = 255 \Rightarrow x = 85$.

Los valores obtenidos son: $x = 85, \quad y = 100, \quad z = 70$.

Comprobación de soluciones

Sustituyamos los valores en las ecuaciones originales:

a) Comprobación del costo total: $20(85) + 25(100) + 40(70) = 1700 + 2500 + 2800 = 7000$.Correcto.

b) Verificación de la relación de acciones: $2(85) = 100 + 70 \Rightarrow 170 = 170$.Correcto.

c) Comprobación del número total de acciones: $85{+}100{+}70 = 255$.Correcto.

Por lo tanto, la solución obtenida es correcta.

14. **Se han comprado acciones de tres empresas A, B y C con los siguientes valores por acción:**

    - **Empresa A: 20 euros por acción.**
    - **Empresa B: 25 euros por acción.**
    - **Empresa C: 40 euros por acción.**

    Se han invertido 7000 euros en total, y se han adquirido 255 acciones. Además, el número de acciones de la empresa A es la mitad de la suma de las compradas en B y C.

    Planteemos el sistema de ecuaciones y resolvámoslo por el método de eliminación de Gauss.

    Solución

    Planteamiento del sistema

    Definimos:

    - $x =$ Número de acciones compradas de la empresa A.
    - $y =$ Número de acciones compradas de la empresa B.
    - $z =$ Número de acciones compradas de la empresa C.

    Las ecuaciones del problema son:

    $$20x + 25y + 40z = 7000$$

    $$2x - y - z = 0$$

    $$x + y + z = 255$$

    Resolución por el método de Gauss

    Escribimos la matriz aumentada:

    $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 2 & -1 & -1 & |0 \\ 20 & 25 & 40 & |7000 \end{bmatrix}$$

    Aplicamos operaciones elementales hasta obtener una matriz triangular superior:

    - Intercambiamos la fila 1 con la fila 3:

      $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 2 & -1 & -1 & |0 \\ 20 & 25 & 40 & |7000 \end{bmatrix}$$

    - Restamos $2F_1$ de F_2: $(2, -1, -1, 0) - 2(1, 1, 1, 255) = (0, -3, -3, -510)$

- Restamos $20F_1$ de F_3: $(20, 25, 40, 7000) - 20(1, 1, 1, 255) = (0, 5, 20, 1900)$
  Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & -3 & -3 & |-510 \\ 0 & 5 & 20 & |1900 \end{bmatrix}$$
- Multiplicamos F_2 por -1:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & 3 & 3 & |510 \\ 0 & 5 & 20 & |1900 \end{bmatrix}$$
- Restamos F_2 de F_3: $(0, 5, 20, 1900) - (0, 3, 3, 510) = (0, 2, 17, 1390)$
  Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |255 \\ 0 & 1 & 1 & |170 \\ 0 & 2 & 17 & |1390 \end{bmatrix}$$
- Restamos $2F_2$ de F_3: $(0, 2, 17, 1390) - 2(0, 1, 1, 170) = (0, 0, 15, 1050)$
- Despejamos z: $15z = 1050 \Rightarrow z = 70$.
- Sustituimos $z = 70$ en la segunda ecuación: $y + 70 = 170 \Rightarrow y = 100$.
- Sustituimos $y = 100, z = 70$ en la primera ecuación: $x + 100 + 70 = 255 \Rightarrow x = 85$.

Los valores obtenidos son: $x = 85, \quad y = 100, \quad z = 70$.

Comprobación de soluciones

Sustituyamos los valores en las ecuaciones originales:

a) Comprobación del costo total: $20(85) + 25(100) + 40(70) = 1700 + 2500 + 2800 = 7000$.Correcto.

b) Verificación de la relación de acciones: $2(85) = 100 + 70 \Rightarrow 170 = 170$.Correcto.

c) Comprobación del número total de acciones: $85+100+70 = 255$.Correcto.

Por lo tanto, la solución obtenida es correcta.

15. **Hallar un número de tres cifras sabiendo que:**

La suma de sus cifras es 9. Si al número dado se le resta el número con sus cifras invertidas, la diferencia es 198.

La cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos cifras.

Solución

Sea el número de tres cifras representado por $100a + 10b + c$, donde:

- a es la cifra de las centenas,
- b es la cifra de las decenas,
- c es la cifra de las unidades.

A partir de las condiciones del problema, establecemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b + c = 9 \\ (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 198 \\ b = \tfrac{a+c}{2} \end{aligned}$$

Multiplicamos la tercera ecuación por 2 para evitar fracciones: $2b = a + c$

Desarrollamos la segunda ecuación: $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 198$

Simplificamos: $99a - 99c = 198$.

Dividimos por 99: $a - c = 2$

Obtenemos el sistema:

$a + b + c = 9$

$a - c = 2$

$2b = a + c$

Sustituyendo $a = c + 2$ en la tercera ecuación: $2b = (c + 2) + c \Rightarrow 2b = 2c + 2v \Rightarrow b = c + 1$

Sustituyendo $a = c + 2$ y $b = c + 1$ en la primera ecuación: $(c + 2) + (c + 1) + c = 9 \Rightarrow 3c + 3 = 9 \Rightarrow 3c = 6 \Rightarrow c = 2$

Sustituyendo $c = 2$ en las ecuaciones: $a = 2 + 2 = 4 \Rightarrow b = 2 + 1 = 3$

Los valores obtenidos son:

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 2.$$

Verificamos las ecuaciones originales:

a) Comprobación de la suma de cifras: $4 + 3 + 2 = 9$.Correcto.

b) Comprobación de la diferencia:$(100 \times 4 + 10 \times 3 + 2) - (100 \times 2 + 10 \times 3 + 4) = 432 - 234 = 198$.Correcto.

c) Verificación de la media aritmética: $3 = \frac{4+2}{2}$.Correcto.