

MATEMATICAS (MAT ICCSS)

1^º Bachillerato

COMBINATORIA



Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

Conceptos

La Combinatoria es la parte de las Matemáticas que se ocupa de la resolución de problemas de elección y disposición de los elementos de cierto conjunto, de acuerdo con ciertas reglas.

Por ejemplo: ¿Cuántas posibles combinaciones pueden darse en la lotería primitiva? ¿Qué posibilidades hay tener un poker de ases? ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse? ¿De cuántas formas se pueden sentar 30 alumnos en 30 asientos de un aula?

Conceptos previos

Población: Es el conjunto de elementos de estudio. Llamaremos tamaño de la población al número de elementos de este conjunto.

Muestra: Es un subconjunto de la población. Llamaremos tamaño de la muestra al número de elementos que la componen.

Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos:

- El orden, es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
- Considerando que dos muestras son diferentes si tienen diferente ordenación
- La posibilidad de repetición o no de los elementos

Veamos algunos ejemplos:

Quiniela: La población en este caso es $\{1, X, 2\}$, que tiene tamaño 3.

Una quiniela es una muestra de tamaño 15 de la población anterior (por ejemplo : 2X1121X1X2122X1).

El orden en las quinielas es importante y que se permiten elementos repetidos. Es por tanto una muestra ordenada y con repetición.

Primitiva: La población son todos los números desde el 1 al 49, es decir $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$

Por tanto, y si nos olvidamos del complementario, una apuesta de lotería primitiva es una muestra de tamaño 6 de dicha población (por ejemplo 3, 18, 40, 41, 43, 45).

Son muestras no ordenadas y sin repetición ya que el orden no influye y los elementos no se pueden repetir (un número no puede salir más de una vez).

Póker La población ahora está formada por las 52 cartas que componen una baraja francesa, es decir $\{1 \text{ corazones}, 2 \text{ corazones}, \dots, \text{Rey picas}\}$, tenemos una muestra de 52 cartas, que evidentemente no se pueden repetir y además el orden no importa.

Muestras no ordenadas y sin repetición. Aula La población son los 30 alumnos a elegir, y la muestra tiene el mismo tamaño, 30, pues elegimos a los 30

alumnos. El orden sí que es importante y además las personas no se pueden repetir.

Son muestras ordenadas y sin repetición

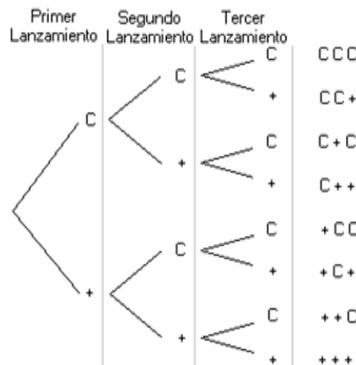
El objetivo de la Combinatoria es calcular cuántos tipos de muestras de un determinado tamaño se pueden extraer de cierta población. El resultado en el que nos basaremos a la hora de calcular el número de muestras es el siguiente:

Principio de multiplicación:

Si un procedimiento se puede separar en r etapas, de modo que el resultado de una de ellas no influye en el resultado de las otras, y en cada una de estas etapas se obtienen respectivamente $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ resultados, entonces el procedimiento global conduce a $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r$ resultados.

¿Cuántos resultados podemos obtener al lanzar una moneda tres veces? Aplicando el principio anterior, en el primer lanzamiento obtenemos 2 resultados (Cara o cruz), en el segundo lanzamiento, otros 2 y en el tercero también en 2.

Por tanto, en total hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibles resultados. Si lo disponemos en forma de diagrama de árbol, obtenemos los 8 resultados:



Variaciones sin repetición

Si tenemos una población de tamaño n y queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño k ($k \leq n$), razonemos de este modo:

- El primer elemento lo podemos elegir entre n elementos.
- El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre $n - 1$ elementos. $(n - 2 + 1)$.
- El tercero, al no poder repetir, podemos elegirlo entre $n - 2$ elementos. $(n - 3 + 1)$
- El elemento k , lo podremos elegir entre $n - k + 1$ elementos.

Por tanto, y aplicando el principio de multiplicación en total hay :

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

muestras de tamaño k ordenadas y sin repetición

Las muestras ordenadas y sin repetición se denominan Variaciones sin repetición . Por tanto, si el tamaño de la población es n y el de la muestra k , el número de variaciones sin repetición lo expresaremos por:

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Ejercicio ¿Cuántos números de cuatro cifras no repetidas se pueden formar con las cifras del 1 al 9 (ambas inclusive)?

Variaciones con repetición

Si la población es de tamaño n y la muestra de tamaño k , pero ahora permitimos repeticiones, procedemos así:

El primer elemento lo podemos elegir entre n elementos. El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre n elementos. . El tercero, al no poder repetir, podemos elegirlo entre n elementos. El elemento k , lo podremos elegir entre n elementos.

En total tendremos $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (k veces) $= n^k$ muestras de este tipo.

Las muestras ordenadas y con repetición se denominan Variaciones con repetición y lo expresaremos:

$$VR_n^k = n^k$$

Ejemplo 1. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 4 cartas (no necesariamente distintas de una baraja de 40 cartas)?.

La primera se puede elegir de 40 maneras.

La segunda, al poder repetir, también se puede elegir de 40 maneras.

La tercera, al poder repetir, también se puede elegir de 40 maneras.

La cuarta, al poder repetir, también se puede elegir de 40 maneras.

En total hay $40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 = 2560000$ formas.

Ejercicio ¿Cuántos números de tres cifras (no necesariamente distintas) pueden formarse con los dígitos 1,6,7,8,9?.

Permutaciones simples o sin repetición

Si tenemos una población de tamaño n y queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño n , razonemos de este modo:

El primer elemento lo podemos elegir entre n elementos.

El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre $n - 1$ elementos.
($n - 2 + 1$).

El tercero, al no poder repetir, podemos elegirlo entre $n - 2$ elementos.
($n - 3 + 1$).

...

El elemento n , lo podremos elegir entre $n - n + 1$ elementos.(el último)

Es un caso particular de variaciones que se tome una muestra de tamaño igual al tamaño de la población, es decir, $k = n$, las variaciones se denominan permutaciones y se obtendría:

$$V_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - n + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

El producto de todos los números enteros desde el 1 hasta el n se denomina FACTORIAL y se representa por $n!$. Por definición, $0! = 1$ y $1! = 1$.

No existen los factoriales de los números negativos

Por tanto este caso particular de variaciones sin repetición se denomina permutaciones sin repetición de n elementos y se expresa:

$$P_n = n!$$

Ejemplo ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 alumnos personas en 10

asientos en un aula?. El primer alumno se puede sentar en 10 sitios. El segundo en 9, el tercero en 8, ...etc. De modo que hay $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ posibilidades, es decir, $P_{10} = 10! = 3628800$.

Ejercicio: ¿Cuántas palabras de 8 letras (con o sin sentido) se pueden formar

con las letras A B C D E F G H?.

Permutaciones con repetición

Si queremos calcular el número de permutaciones de n elementos de los cuáles hay n_1 de una clase, n_2 de otra, etc. . . de modo que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, entonces hablamos de permutaciones de n elementos, algunos de los cuales están repetidos, lo que se expresa como:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Ejemplo: Con los dígitos 1 1 1 0 0 ,¿ cuántas cadenas de 5 cifras pueden formarse? La A se repite 3 veces y la letra B se repite 2 veces, y en total hay 5 letras. Así el número total de palabras son:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Dichas palabras serían: 11100, 11010, 11001, 10110, 10101, 10011 ... Escribe los restantes.

Ejercicio: Con 5 signos + y 3 signos - ¿Cuántas cadenas de símbolos se pueden formar?

Combinaciones

Supongamos que tenemos una bolsa con 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos bolas, sin importarnos el orden y sin repetir, ¿cuántos posibles resultados hay?. Examinemos las posibilidades. Si el orden fuese importante ya sabemos que tendríamos $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades ($V_5^2 = 5 \cdot 4$) que serían:

1, 2	1, 3	1, 4	1, 5
2, 1	2, 3	2, 4	2, 5
3, 1	3, 2	3, 4	3, 5
4, 1	4, 2	4, 3	4, 5
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4

Ahora bien, como no nos importa el orden, para nosotros las parejas 2,1 y 1,2 que son 2, en realidad sólo deberían contar como una, y lo mismo ocurre con el resto de parejas.

Estamos contando cada pareja 2 veces. Por tanto, para obtener el número de parejas que buscamos tenemos que dividir entre 2. Así resulta que el número de muestras no ordenadas y sin repetición que tenemos es de: $20 / 2 = 10$, sólo 10 posibilidades que son:

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}

donde las llaves indican que el orden no importa.

Si sacásemos 3 bolas en lugar de 2, tendríamos los tríos:

1,2,3 1,2,4 1,2,5 etc. . . en total $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades
($V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$).

Razonando de igual manera al caso anterior, todos aquellos tríos en los que estuviesen por ejemplo, el 1, el 2 y el 3 estarían repetidos.

Ahora bien, ¿cuántas veces se repite cada trío?. Veamos, tomando como ejemplo los tríos con 1,2 y 3 obtenemos:

1,2,3 1,3,2 2,1,3 2,3,1 3,1,2 3,2,1

6 posibilidades ($P_3 = 3!$) que en realidad representan lo mismo pues no nos importa el orden.

Lo mismo ocurre con cada trío, de modo que cada uno de ellos se repite 6 veces, así pues si no tenemos en cuenta el orden, el número de muestras no son 60 sino:

$$\frac{60}{6} = 10 \text{ maneras (no ordenadas y sin repetición).}$$

Ejercicio: Escribir los 10 tríos del ejemplo anterior.

Formalizando lo anterior, si la población es de tamaño n y se extraen muestras de tamaño k , si fuesen ordenadas serían $V_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ pero como son no ordenadas tenemos que dividir por el número de maneras de ordenar esas muestras de tamaño k , es decir hay que dividir por $P_k = k!$

Resumiendo, el número de muestras no ordenadas y sin repetición de tamaño k que se extraen de una población de tamaño n es:

$$\frac{V_n^k}{P_k}$$

Las muestras no ordenadas y sin repetición se denominan Combinaciones sin repetición y las expresaremos:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}$$

El número de combinaciones sin repetición C_n^k se recuerda de manera más sencilla mediante otra fórmula:

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

La expresión n sobre k se denomina número combinatorio y se lee "n sobre k".

Una regla sencilla que permite calcular este número combinatorio es:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Ejemplos: 1. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 3 bolas numeradas en cualquier orden, de una bolsa que contiene 5 bolas?.

Serían combinaciones de 5 elementos de los que sacamos 3, es decir, tenemos que calcular:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

son las maneras que habíamos calculado en el ejemplo de la introducción.

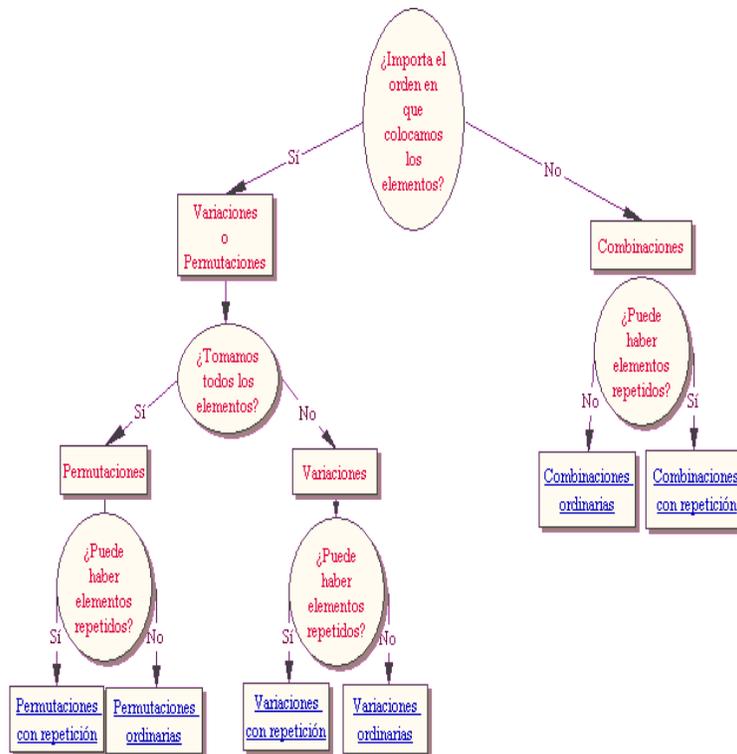
2. ¿De cuántas formas se puede formar un grupo de trabajo de 6 alumnos de entre una clase de 27?.

En este caso son combinaciones (no importa el orden) de 27 elementos de los que se escogen 6, es decir:

$$C_{27}^6 = \binom{27}{6} = \frac{27!}{(21)! \cdot 6!} = 296010$$

Ejercicio: ¿De cuántas maneras se pueden extraer 6 bolas de un bombo que contiene 49 bolas? (Lotería Primitiva)

¿Cómo las diferenciamos?



Ejemplos

- a) Como respuesta a un anuncio de trabajo se presentan 12 personas para cubrir tres plazas de administrativo ¿ Cuantas grupos diferentes de personas se pueden seleccionar?

(a) Debemos elegir grupos de 3 de entre los 12 , no influye el orden

$$C_{12}^3 = \binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$$

- ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con 8 puntos en el plano si tres de ellos nunca están alineados? Para que dos triángulos sean distintos se tienen que diferenciar al menos en un vértice y el orden en que tomamos los vértices no influye

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56$$

- ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3,...,9?

$$V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

4. Con las letras del alfabeto español(25 letras) ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de 6 letras distintas pueden formarse?- ¿Cuántas empiezan por vocal?

$$V_{25}^6$$
$$5V_{24}^5$$

5. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5?

(a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

6. ¿ Cuantos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3?

(a) $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$

- (b) Hemos restado P_3 para descontar los números que empiezan por cero, ya que estos no son de cuatro cifras.

7. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar si en ellos siempre hay 1 uno, 2 doses y 3 treses ¿

$$P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$$