S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato I y II

EJERCICIOS DE ANÁLISIS

Optimización

Ejercicios resueltos

Guión para resolver problemas de optimización

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

1. Determinar la función objetivo del problema: la que hay que hacer máxima o mínima
2. Calcular la derivada de la función f.
3. Buscar los puntos críticos de f igualando a 0 la derivada f´.
   a) Considerar si existen puntos de no derivabilidad y discontinuidad como puntos críticos(casos raros).
4. Estudiar la monotonía de la función (crecimiento y decrecimiento) en los intervalos del Dominio de la función que se generan por los puntos críticos para determinar el tipo de extremos (relativos o absolutos).
   a) Usar el criterio de la primera de rivada o de la 2ª derivada
5. Considerar los extremos del dominio, en el caso de ser un intervalo cerrado como posibles puntos de solución.

Ejemplos

1. **Halla dos números que sumados den 20 y cuyo producto sea máximo.**

   Solución:

   Sean x e y los números buscados.

   El problema a resolver es el siguiente:

   $x + y = 20$

   xy máximo

   Llamamos p al producto de los dos números, esto es, $p = xy[*]$

   Como $x + y = 20$; $y = 20 - x$

   y sustituyendo en [*] resulta: $p(x) = (20 - x)x = 20x - x^2$

   Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función p(x):

   $p'(x) = 20 - 2x;$

   $p'(x) = 0;$

   $20 - 2x = 0; x = 10$

   $p''(x) = -2$

   $p''(10) < 0$

   $x = 10$ es un máximo

   Por tanto, los números buscados son:$x = 10; y = 10$

2. **Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros(V) diarios depende del precio del billete(p) según la expresión:** $V(p) = 300 - 6p$ **.**

   a) **Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios** (I) **de esa compañía en función del precio del billete.**

   b) **¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es** 10€**?**

   c) **¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?**

   d) **¿Cuáles son esos ingresos máximos?**

   Solución: $V(p) = 300 - 6p$ es el número de viajeros según el precio del billete, p.

   Por tanto la función que nos proporciona los ingresos en función del precio del billete será el producto del número de viajeros por el precio que paga cada uno:

   $$I(p) = V(p) \cdot p = 300p - 6p^2$$

   $I(10) = 300 \cdot 10 - 6(10)^2 = 3000 - 600 = 2400$€ ingreso diario para un billete de 10€

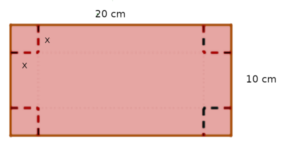
   $I'(p) = 300 - 12p$

   $I'(p) = 0 \Rightarrow 300 - 12p = 0 \Rightarrow p = \frac{300}{12} = 25$€

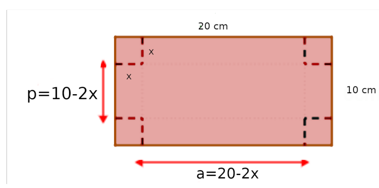
   $I''(p) = -12 < 0$, por tanto, $p = 25$€ es máximo (criterio de la 2ª derivada). La función crece y decrece. Es un máximo absoluto.

   $I(25) = 300 \cdot 25 - 6(25) = 3750$€ ingresos máximos

3. **Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20x10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L debe medir entre 2 y 3 cm (2≤L≤3).**



Solución: Si a es el ancho de la caja, h es su altura y p es su profundidad, entonces su volumen es V=a·h·p. Al cortar los cuatro cuadrados de lado x, el ancho de la caja es $a = 20 - 2x$ .La profundidad es $p = 10 - 2x$. Por último, la altura coincide con el lado del cuadrado recortado:



Luego el volumen de la caja en función de x es (paso 1) $V(x) = (20 - 2x)(10 - 2x)x = 4x^3 - 60x^2 + 200x$

Derivamos la función volumen: $V'(x) = 12x^2 - 120x + 200$ .Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos $x = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{3}$.

Aprox $x = 7{,}89$ y $x = 2{,}11$ .El dominio de la función V es [0,5] con lo que se desecha 7,89 por imposible, ya que no puedo cortar un cuadrado con ese lado de nuestra pieza.

Situamos los puntos en la recta real y estudiamos los signos en los intervalos:

		0		2.11		5		
V			$\nearrow$		$\searrow$			
V'			+	0	-			

Escogemos los puntos $x = 1$ del primer intervalo, $x = 3$ del segundo intervalo . $V'(1) = 92 > 0$ y $V'(3) = -52$ Luego la función es creciente en el primer intervalo, decreciente en el segundo. Como en el intervalo $[2{,}11, 3]$ la función es decreciente, el volumen será máximo para $x = 2{,}11cm$.

Por tanto, las dimensiones de la caja deben ser $15{,}78x5{,}78x2{,}11cm$ y su volumen es $192{,}45cm^2$.

4. **Una empresa vende 0.7 toneladas de zumo y 0.3 toneladas de sobrante por cada tonelada de materia prima. El coste de la materia prima es de $0{,}8€/kg$, los precios de venta del zumo y del sobrante son $2{,}5€/kg$ y $0{,}05€/kg$, respectivamente, y el coste de producción viene dado por la función $Coste(x) = 0{,}05x^3$ donde x representa las toneladas de zumo producido. Obtener:**

   a) **Una expresión para calcular las ganancias netas en función de las toneladas de materia prima.**

   b) **La cantidad de zumo que se debe fabricar para que las ganancias netas sean máximas.**

   Sea x la cantidad de materia prima en Toneladas y sean z y s las cantidades de zumo y de sobrante, respectivamente.

   El número de toneladas de zumo producido en función de las toneladas de materia prima es $z = 0{,}7x$ .Y el de sobrante $s = 0{,}3x$,

   Las ganancias brutas son: $G(x) = 2{,}5 \cdot 1000 \cdot z + 0{,}05 \cdot 1000s = 2500z + 50s$

$$G(x) = 500 \cdot 0{,}7 \cdot x + 50 \cdot 0{,}3x = 1765x$$

Hemos multiplicado por 1000 porque el precio es por kilo.

El coste total es el coste de la materia prima más el coste de producción:$C(x) = 0{,}8 \cdot 1000x + 0{,}05x^3 = 800x + x^3$

Las ganancias netas en función de las toneladas de materia prima son:

$$N(x) = G(x) - C(x) = 1765x - 800x - 0{,}05x^3 = 965x - 0{,}05x^3$$

Calculamos la derivada: $N'(x) = 965 - 0{,}15x^2$Igualamos la derivada a 0 y resolvemos la ecuación para buscar puntos críticos: $965 - 0{,}15x^2 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{965}{0{,}15}} = \pm 80{,}21$$

Podemos acotar el dominio de la función al intervalo de los reales positivos ya que no tiene sentido que se produzcan cantidades negativas de zumo.

Representamos los puntos obtenidos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada: Elegimos el punto x=10 del segundo y el punto x=100 del tercer intervalo:

		0		80.21		
N			$\nearrow$		$\searrow$	
N'			+	0	-	

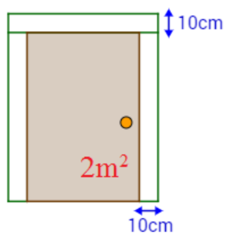
Por el criterio de la primera derivada, la función es creciente en el primer y decreciente en el segundo.De la monotonía, deducimos que en el punto x=80.21 tiene un máximo. Por tanto, las ganancias netas son máximas cuando la cantidad de materia prima es 80.21 toneladas.

En toneladas de zumo, equivale a 56.15 toneladas ya que $80{,}21 \cdot 0{,}7 = 56{,}15$

5. **Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de 10cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de 128€ por metro cuadrado y el de los listones es de 87€ por metro lineal. Calcular:**

   Las dimensiones de una puerta de $2m^2$ de superficie de hoja para que el coste sea mínimo. ¿Cuál será su precio?

   Si la puerta es de 2.5 metros de ancho y 0.8 metros de alto, ¿cuál es su precio?



Sean x e y la anchura y altura de la hoja de la puerta, respectivamente. Como la superficie de la hoja es $2m^2$, tenemos que $x \cdot y = 2$

Como la anchura de los listones es de $10cm$, la longitud del listón del lado superior debe ser (escribimos 0,1 ya que los precios son por metro) $x + 0{,}1 + 0{,}1$

La longitud de los dos listones de los lados laterales debe ser $2y$

El coste de la hoja es 2·128=256

El coste del listón superior es $(x + 0{,}2) \cdot 87 = 87x + 17{,}4$.El coste de los listones laterales es $2 \cdot y \cdot 87 = 174y$

Por tanto, el coste total es $C(x) = 273{,}4 + 87x + 174y$

Como tenemos dos variables, escribimos y en función de x:$xy = 2$; $y = \frac{2}{x}$.Con lo que $C(x) = 273{,}4 + 87x + 174 \cdot \frac{2}{x}$

Calculamos la derivada: $C'(x) = 87 - \frac{348}{x^2}$

Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación para buscar los puntos críticos:$x = \pm 2$ .El dominio a considerar en el problema es $(0, +\infty)$

Situamos los puntos críticos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en los 2 intervalos:

		0		2		
C			↘		↗	
C'			-	0	+	

Nota: La función es decreciente en el intervalo (0,2) y creciente para x≥2. Además, tiene un mínimo en x=2.

Las dimensiones son 2 metros de ancho y 1 de alto. Calculamos el coste: Luego el coste total de la puerta es $C(2) = 621{,}4$€.

b) Evaluando la función en (x=2.5),$C(2{,}5) = 630{,}1$€

6. **Encontrar parejas de números x e y tales que y sea el doble del cuadrado de x y que la resta de sus cuadrados ($\mathbf{x^2 - y^2}$) sea máxima.**

   Solución Sean x e y los números que buscamos.

   Como uno debe ser el doble del cuadrado del otro, $y = 2x^2$

   La resta de sus cuadrados es $x^2 - y^2 = x^2 - (2x^2)^2$;

   Luego la función a optimizar es $f(x) = x^2 - 4x^4$

   Derivamos la función:

   $f'(x) = 2x - 16x^3$

   Igualamos la derivada a 0 y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos: $f'(x) = 2x - 16x^3 = 0$;

   $2x(1 - 8x^2) = 0$

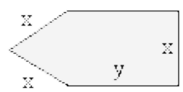
   Una solución es $x = 0$. Las otras dos soluciones son $x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{4}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

   Representamos los puntos críticos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo.

		$-\frac{\sqrt{2}}{4}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{4}$		
f					$\nearrow$		$\searrow$	
f'				0	+	0	-	

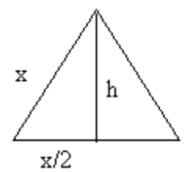
   Escogemos los puntos x=±1,±0.1:De izquierda a derecha, la función es creciente, decreciente, creciente y decreciente. Deducimos de la monotonía de f que tiene máximos en los puntos Calculamos y para cada x: Las dos parejas encontradas son

7. **Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima?**



Solución: El objetivo que el área de la figura sea máxima. La figura está formada por un triángulo equilátero de lado x y por un rectángulo de lados x e y.

Perímetro $= 100$ m $;100 = 3x + 2y; y = 50 - \frac{3x}{2}$



Área del triángulo:; $A_{\underline{\mathrm{T}}} = \frac{x\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

La altura del triángulo es: $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Área del rectángulo: $A_R = xy$

Área total: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x(50 - 3\frac{x}{2})$

Derivamos e igualamos a 0; A´(x) = 0 $A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 50 - 3x$=0;$x = \frac{100}{6-\sqrt{3}} = \frac{100(6+\sqrt{3})}{33}$

$A''(X) = \frac{\sqrt{3}-6}{3}$<0(cuyo valor es negativo siempre, ya que es cte). Luego el valor hallado es el máximo para la función(criterio de la segunda derivada)

Para ese valor hallado $x = \frac{100}{6-\sqrt{3}} = \frac{100(6+\sqrt{3})}{33}$ se tendrá el máximo buscado.

El valor de y será: $y = 50 - \frac{50(6+\sqrt{3})}{11}$.

8. **Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima y calcular dicha suma**

   Solución: Sean los sumandos $x + y = e$

   $y = e - x$

   Se desea que $S(x) = lnx + ln(e - x)$ sea máxima.

   El máximo se da en las soluciones de $S'(x) = 0$.

   $S'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{e-x}$

   $S'(x) = 0; \frac{(e-x)-x}{x(e-x)} = 0 \,; e - 2x = 0 \,; x = \frac{e}{2};$

   Estudiando la derivada primera en sus signos

		$\frac{e}{2}$	
f	$\nearrow$		$\searrow$
f'	+	0	-

   o bien estuduando la segunda derivada $S''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(e-x)^2} < 0$ para cualquier valor de x; en consecuencia, para $x = \frac{e}{2}$ se tendrá el máximo buscado.

   La suma pedida es: $S = ln\frac{e}{2} + ln(e - \frac{e}{2}) = 2ln\frac{e}{2} = 2(lne - ln2) = 2 - 2ln2$

9. **Para fabricar un depósito cilíndrico de agua se necesitan materiales distintos para las bases y el lateral. El precio por metro cuadrado del material de las bases es de 2€ y el del lateral es de 15€. Calcular la altura h y el diámetro d=2r para que el coste de un depósito de 10 mil litros de capacidad sea mínimo. ¿Cuál es el precio del depósito?**

   Solución Tendremos que utilizar las fórmulas del área y del volumen de un cilindro.

   Sean r el radio y h su altura. El volumen es el producto del área de la base por la altura $V = A_B \cdot h$

   El área de la superficie es el área de las bases más el área del lateral.

   El lateral es un rectángulo de altura h y cuya base coincide con el perímetro de la base del cilindro.$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h$

   Por tanto, el área total del cilindro es

   $$A = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$$

   Como los precios de los materiales del cilindro son por metro cuadrado, la unidad de medida que utilizaremos será el metro.

   La capacidad del cilindro debe ser 10000L. Sabiendo que un litro equivale a $1dm^3$, la capacidad ha de ser de $10000dm^3 = 10m^3$,

   Igualamos el volumen del cilindro a su capacidad: $\pi r^2 \cdot h = 10$

   El precio del material es de 2€ por metro cuadrado de base. Como hay dos bases, la cantidad asciende a $2(2\pi r^2) = 4\pi r^2$€

   Y como el precio del lateral es de 15€ por metro cuadrado, éste asciende a $15(2\pi rh) = 30\pi$rh

   Luego la función precio del cilindro (del depósito) es $P = 4\pi r^2 + 30\pi rh$

   Podemos escribir h en función de r: $h = \frac{10}{\pi r^2}$. Con lo que la función queda $P(r) = \frac{300}{r} + 4\pi r^2$

   Derivamos la función:$P'(r) = \frac{-300}{r^2} + 8\pi r$

   Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos: $P'(r) = \frac{-300}{r^2} + 8\pi r = 0;\ r = \sqrt[3]{\frac{300}{8\pi}}$

   Ahora estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo. Escogemos los puntos $r = 1$ y $r = 3$:

		$r = \sqrt[3]{\frac{300}{8\pi}}$=2.2	
f	↘		↗
f'	-	0	+

   Luego la función tiene un mínimo en r=2.29. Por tanto, el radio debe medir 2,29my la altura $h = \frac{10}{\pi r^2} = 0,6$ El precio del depósito nos lo proporciona la función:P(2,29).El precio del depósito es 196,9€.

10. **Una empresa está trazando parcelas iguales y rectangulares sobre el plano de un terreno para construir chalets de $200m^2$ de superficie. Según la legislación de la zona, entre el chalet y la valla de la parcela debe haber un margen de 3 metros en los lados verticales y de 10 metros en los lados horizontales. Calcular las dimensiones que deben tener las parcelas para que su área sea mínima. ¿Cuál será el área de una parcela?**

    Sean x e y las longitudes de los lados de la parcela (sin contar los márgenes), siendo x el lado horizontal.

    El lado horizontal de la parcela, x, más el margen lateral izquierdo y el margen lateral derecho mide $x + 3 + 3 = x + 6$

    El lado vertical de la parcela, y, más el margen superior y el margen inferior debe medir $y + 10 + 10 = y + 20$

    Como la superficie de la construcción debe medir $200m^2$ sin contar los márgenes, de donde podemos obtener y en función de x:$y = \frac{200}{x}$

    La función área de la parcela es

    $$A(x) = (x + 6)(y + 20) = (x + 6)(\frac{200}{x} + 20) = 320 + \frac{1200}{x} + 20x$$

    Como x está en el denominador, tenemos que exigir que sea distinto de 0. $D =]0, \infty[$

    Derivamos la función: $A'(x) = \frac{-1200}{x^2} + 20$

    Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos:$\frac{-1200}{x^2} + 20 = 0; x^2 = 60; x = \sqrt{60} =$ 7,75m

    Representamos la recta real con el punto crítico y el punto x=0 (ya que en x=0 la función no está definida):

    Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo.

	(0		$r = \sqrt{60}$=7,75	
f		$\searrow$		$\nearrow$
f'		-	0	+

    Nosotros escogemos los puntos $x = 1$ y $x = 8$:

    Sólo hay un mínimo y está en la parte de los reales positivos que es la que nos interesa (ya que la longitud debe ser positiva).

    Por tanto, $x = 7,75; y = 25,8$

    Para calcular las dimensiones de la parcela tenemos que sumar los márgenes.

    El lado horizontal de la parcela (con márgenes) mide $13,75m$.Y el lado vertical (con márgenes) mide $y + 20 = 45,8m$

    Luego las dimensiones de la parcela deben ser 45,8x13,75 metros y su área total es 629,75m^2 .

11. **Se desea colocar un cartel publicitario rectangular en el hueco que hay debajo de un puente cuya forma viene dada por la parábola El cartel debe sujetarse por sus dos vértices superiores y la distancia entre el cartel y el suelo debe ser de 3m: Calcular las dimensiones del cartel para que su área sea máxima y los puntos de los vértices superiores del cartel.**

    Solución Hemos llamado a a la mitad de la anchura del cartel y b a la altura del cartel. Nota: la función es simétrica respecto del eje de las ordenadas. Tal y como se muestra en la imagen, De la expresión anterior podemos escribir b en función de a : La función área del cartel esDerivamos la función área: Igualamos a 0 para buscar los puntos críticos: Situamos los puntos críticos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en los intervalos: Escogemos a=-1 para el primer intervalo, a=0 para el segundo y a=1 para el tercero: De izquierda a derecha, la función es decreciente, creciente y decreciente. Por tanto, tiene un máximo en a=0.65 . Con lo que la anchura del cartel debe ser y la altura, Como la parábola es simétrica, los vértices superiores del cartel son

12. **Un prado de $20000m^2$ sostiene a 20 vacas. Cada una tiene una producción diaria de 10 litros de leche. Al introducir una nueva vaca en el prado, el rendimiento de cada vaca baja en un litro. ¿Cuál es el número de vacas que hay que poner para tener una producción máxima?**

    Solución: Estamos interesados en la producción de leche, esta está dada por $P = producción = 10 \cdot (20) = 200l$ (si n vacas extras) $P = 9(21) = (10-1)(20+1)$ al introducir una vaca

    $P = (10-2)(20+2)$ al introducir dos vacas

    En general si x representa al número de vacas que hemos de introducir, la producción P, se expresa de la siguiente manera $P(x) = (10-x)(20+x) = -x^2 - 10x + 200$.

    Para obtener su máximo, derivamos e igualamos a cero.

    $P'(x) = -2x - 10$;$P'(x) = -2x - 10$=0;$x = -5$; ahora P$''(x) = -2$, por lo tanto hay un máximo en $x = -5$, esto quiere decir que si queremos una producción máxima debemos quitar 5 vacas y no introducir alguna.

    Discusión:Si la producción de leche disminuye en un litro al introducir una vaca y aumenta un litro al retirar una vaca, entonces quedarían 15 vacas produciendo 15 litros, con esto la producción sería de 225 litros, sin embargo, si la producción de leche por vaca no aumenta al retirar una vaca, entonces para obtener la máxima producción de leche no debemos retirar ni introducir vaca alguna.

13. Encuentra la recta tangente a la curva 236y x x que tenga pendiente máxima.

    Solución: La fórmula para predecir pendientes de las rectas tangentes (a una curva), en este caso, esta dada por 2( ) 12 3m x x x (la derivada de la función) y nos piden optimizar ()mx para ello procedamos de manera usual.´( ) 12 6m x xde aquí´( ) 0mx2x, además´´( ) 6 0mx. Por lo tanto en 2x,mtiene un máximo, cuyo valor es (2) 12my este se da en el punto (2,16)de la función dada inicialmente.Finalmente, encontramos la ecuación de la recta tangente, como pasa por (2, 16) y tiene pendiente 12m, usemos la forma punto pendiente de la recta.16 12(2)yxo 12 8 0

14. **Las ganancias diarias en miles de euros de una empresa petrolera son si $0 \leq x < 15$ ysi $15 \geq x$, siendo x el número de barriles de 1000L que se producen. Calcular cuántos barriles deben producirse para maximizar las ganancias teniendo en cuenta que no se pueden extraer más de 35000L diarios.**

    a) Solución Calculamos la derivada de las dos funciones: Igualamos ambas funciones a 0 para buscar los puntos críticos: Representamos la recta real y los tres puntos críticos y estudiamos el signo de la derivada (teniendo en cuenta que en $x=15$ cambia la función, por lo que añadimos también este punto): Para estudiar el signo tomamos los puntos arbitrarios 5, 10, 16, 25 y 32:Luego, de izquierda a derecha, la función es creciente, decreciente, creciente, decreciente y creciente. Los puntos críticos $x=8$ y $x=20$ son máximos, pero tenemos que tener en cuenta que a partir de $x=30$ la función es creciente. Como no se pueden extraer más de 35000L diarios, debemos exigir que $x \leq 35$. Al ser la función creciente en el intervalo [30,35], también tenemos que considerar $x=35$ como un máximo. Al tener tres máximos, debemos calcular el valor de la función en cada uno de ellos para escoger el mayor: Por tanto, las ganancias son máximas cuando se producen 20 ó 35 barriles.

15. **Los costes de fabricación, C(x) en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión:** $C(x) = 10 + 2x$ **.El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por:** $P(x) = 20 - \frac{6x^2}{800}$ **Obtener la función de ganancias ¿Qué cantidad de salchichas interesa producir para maximizar ganancias? Calcular en este caso, el precio de venta y la ganancia que se obtiene.** Solución: Sea x el número de kilogramos de salchichas a fabricar El precio de venta de un kilogramo de salchichas es 800 6x P x 20 2 ( ) = − En total obtendremos por la venta de x kilogramos: 800 6x x P x 20x 3 ( ) = − La función de ganancias es: ( ) 18x 10 G x 2 2 '( ) = − + = − + 800 x 800 20 2 9 7200 x 18 9x 18 400 7200 400 9x 18 0 400 9x G x 0 2 2 2 2 ⇒ = = ⇒ = ± = ± '( ) = ⇒ − + = ⇒ − = − ⇒ = = ⇒ De los dos valores obtenidos descartamos el negativo Vamos si el valor positivo es máximo: 400 18x G"(x) = − Claramente se aprecia que ( ) 0 400 18 20 2 G 20 2 < " = − x = 20 2 es un máximo, por lo que conviene fabricar 20 2 28,28 Kg de salchichas para obtener el máximo beneficio. El precio de venta de un kilogramo de salchicha será: ( ) ( ) 20 6 14 800 6 800 20 800 6 20 2 P 20 2 20 2 = − = = − = − € Las ganancias obtenidas por la venta de 20 2 28,28 Kg es: ( ) ( ) + ( ) − = − + − = = − 18 20 2 10 6 360 2 10 800 6 20 2 G 20 2 3 (360 2 − 16 493,12 €

16. **Problema 9 Se desea construir una mesa con la siguiente forma siendo L la longitud del ancho del rectángulo y R el radio del extremo semicircular. El precio del cristal a medida con forma rectangular es de \$90 por metro cuadrado. Sin embargo, el precio del cristal con corte circular viene dado por la función Coste(R)=150R 2 Calcular las medidas de la mesa de 6m 2 para que el coste sea mínimo bajo la condición 1≤R≤2 y comentar el resultado obtenido.**

    Solución La altura de la mesa (h) coincide con el diámetro del semicírculo: El área de la parte rectangular es Y el área del semicírculo es Luego la fórmla del área total de la mesa es Como el área de la mesa ha de ser de 6m 2 , tenemos queDe esta relación podemos aislar el producto hL: Para calcular el coste de la parte rectangular tenemos que utilizar el área del rectángulo (porque el precio es por metro cuadrado). Su coste es En cambio, el coste del semicírculo es función del radio es El coste total es La derivada de la función es Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación: La función f es decreciente en los negativos y creciente en los positivos. Por tanto, el coste de la mesa será mínimo cuando R tome el menor valor (no negativo) posible. Luego el radio de la mesa debe ser R=1m. Calculamos la altura y la anchura de la mesa:El coste de la mesa es \$548.62: Como comentario, podemos decir que el mínimo encontrado no se corresponde con un mínimo propio de la función (de los que anulan la primera derivada), sino del extremo de definición del radio R. Como el coste de la parte semicircular de la mesa es mucho mayor que el de la parte rectangular, minimizar el coste sin restricciones implica fabricar la mesa sin la parte semicircular.

17. **Problema 10 Se inscribe un rectángulo de base b y altura h en una circunferencia de radio r. Si el centro del rectángulo coincide con el de la circunferencia, calcular sus lados en función del radio r para que su área sea máxima. ¿Cuál es el área del rectángulo? Ayuda: algunos ejemplos de rectángulos inscritos del modo indicado en el enunciado son**

    Solución El área del rectángulo es Como el centro del cuadrado coincide con el de la circunferencia, sus diagonales miden lo mismo que el diámetro, es decir, miden dos veces el radio:

    Al representar una de las dos diagonales se obtienen dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para escribir la altura h en función del lado b y del radio:Así, el área del rectángulo es De este modo, el área es función de la base (el radio r no es una variable). Derivamos la función área: Nótese que para que el radicando sea positivo debe exigirse Pero como b es una longitud, debe ser positiva, así que Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos:Por tanto, tenemos dos puntos críticos. Sólo situamos el positivo en la recta real y estudiamos el signo de la derivada. Utilizamos b=r y b=1.5r: Nota: Hemos acotado la recta al intervalo de los valores que puede tomar b. Luego la función es creciente en el intervalo de la izquierda y decreciente en el de la derecha. Por tanto, el punto b=r√2 es un máximo. La altura del rectángulo debe serPara que el área sea máxima, la base y la altura deben medir r√(2), es decir, se trata de un cuadrado de lado r√(2). Su área es

18. **De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.**

    a) Solución: Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será V = x2 y. Esta es la función que se desea hacer máxima. Se sabe que 2x + 2y = 30 y = 15 x. Luego 2 2 2 3 V(x) x y x (15 x) 15x x El máximo de V se da en la solución de V´= 0 que hace negativa a V´´. ´( ) 30 3 3 (10) 2 V x x x x x ; V´´(x) 30 6x La derivada se anula para x = 0 y x = 10. Como V´´(!0) = 30 $<$ 0, para ese valor se tiene el máximo buscado. Las dimensiones serán 10 $\times$ 10 $\times$ 5; y el volumen 500 cm3 .

19. **Encontrar dos números tales que la suma de uno de ellos con el cubo del otro sea 108 y que su producto sea lo más grande posible.**

    Solución

    Sean los números x e y. El hecho de que la suma de uno de ellos con el cubo del otro es 108 se representa del siguiente modo: x+y^3 = 108

    de donde podemos obtener y en función de x :

    Nota: hemos escrito $y + x^3$ en lugar de $x + y^3$ para que al aislar y en función de x no tengamos que escribir la raíz cúbica (así los cálculos serán más simples).

    La función producto es xy

    Derivamos la función:

    Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación:

    Representamos el punto crítico en la recta real:

    Estudiamos el signo de la derivada en ambos intervalos. Utilizaremos los puntos x = 0 y x = 4 :

    Por tanto, la función P es creciente en el intervalo $]-\infty$, 3 [y decreciente en el intervalo] 3 , + ∞ [. De la monotonía se deduce que en x = 3 hay un máximo. Calculamos y :

    Por tanto, los números son x = 3 e y = 81 y su producto es x y = 243 .

20. **Se desea construir una mesa de madera de 3 metros cuadrados con la siguiente forma: La mesa está formada por un rectángulo de lados b y h y en los lados que miden h hay adosados dos semicírculos de igual radio R . Si el precio de la madera es de 120€ por metro cuadrado y el coste del biselado de los bordes de la mesa es de 5€ por decímetro para los bordes rectos y 11€ por decímetro para los bordes curvos, calcular las dimensiones de la mesa (b y h) para que su coste sea mínimo.**

    Solución Como el precio de la madera es por superficie y la superficie es de 3 metros cuadrados, el coste de la madera es Si R es el radio de los semicírculos (son iguales), el lado h del rectángulo es El área total de la mesa es la suma del área de un círculo de radio R y la del rectángulo: Como el área debe ser 3 metros cuadrados, podemos escribir el lado b en función del radio R : El coste total de la mesa es la suma de los costes de: a. la madera (son 360€); b. el biselado de los bordes rectos, es decir, de los dos lados b ; c. el biselado de los dos semicírculos. Esto equivale al biselado del borde de un círculo. Como el área es en metros cuadrados, tenemos que escribir el coste de cada biselado en metros:Por tanto, el coste de la mesa en función del radio R es Nótese que R debe ser no nulo. Derivamos la función: Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación: Ahora representamos los puntos críticos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada. Como el radio debe ser positivo, estudiamos el signo en los dos intervalos de la derecha. Escogemos los puntos R=0.1 y R=0.6 :Como la función decrece y luego crece, tiene un mínimo en R=0.53 . Calculamos los lados óptimos de la mesa (h y b): Luego las dimensiones de la mesa son 1.06 x 1.99 metros y su coste es 926.07€:

21. **La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función 2 C(x) = 90 + 15x − 0,6x , donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años. ¿Hasta que año está creciendo la concentración de ozono? ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?**

    Solución: 2 C(x) = 90 + 15x − 0,6x C'(x) = 15 − 1,2x 125 1 2 15 C x 0 15 1 2x 0 x , , '( ) = ⇒ − , = ⇒ = = C'(x) = −1,2 < 0 , por tanto, x = 12,5es máximo La concentración de ozono contaminante ha estado creciendo hasta 12,5 años después, es decir, hasta el 30 de junio de 2002. La concentración máxima ha sido: C 125 90 15 125 06 (125) 58,75 2 (,) = + , − , , = microgramos por metro cúbico.

22. **Problema 16 De entre todos los rectángulos con igual perímetro, ¿cuál es el de mayor área?**

    Sean x e y los lados del rectángulo. Su perímetro esComo el perímetro es fijo, podemos obtener y en función de x: Así, su área en función del lado x es Calculamos la derivada: Igualamos a 0 para encontrar los puntos críticos: Situamos el punto crítico en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en los dos intervalos: Nota: como x debe ser positivo, hemos acotado la recta real a los positivos. Evaluamos la derivada en los puntos arbitrarios P/6 y P para estudiar su signo:Como la función es creciente en el intervalo izquierdo y decreciente en el derecho, en x=P/4 tiene un máximo. Sustituimos x para calcular y: Luego x=y. Por tanto, de entre todos los rectángulos con el mismo perímetro, el cuadrado es el de mayor área.

23. Ejercicio 2 Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio 1/2

    Solución: Sean x e y las dimensiones del rectángulo. El área es A = x y Además, x e y son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1: x 2 + y 2 = 1 ⇒ y = 1 − x 2 sustituyendo en A: f (x) = x · x 2 − x 4 1 − x 2 = Por tanto, debemos maximizar esta función: f ' (x) = 2 x − 4 x 3 2 · f ' (x) = 0 ⇒ x 2 − x 4 1 − 2 x 2 1 − x 2 = (2 x · 1 − 2 x 2 2 x ·) 1 − x 2 = 1 − 2 x 2 1 − x 2 = 0 ⇒ 1 − 2 x 2 = 0 ⇒ x = ± 1 2 = ± 2 2 De los dos valores obtenidos, descartamos el negativo por no tener sentido en este problema. Comprobemos si x = 2 es máximo: 22 Problemas de optimización (− 4 x · f " (x) = 1 − x 2 − 4 x · 1 − 2 x 2 + x · 1 − 2 x 2) ( ) (1 − x 2 1 − x 2 = =) 1 − x 2 − 1 − 2 x 2 · = − 2 x 2 · − 4 x · 1 − x 2 (1 − x 2 + · = 1 − x) (− 4 x · 1 − x 2 + x · 1 − 2 x 2 (1 − x 2) ·) = 1 − x 2 (x · 1 − 2 x 2 1 − x 2 2) = − 4 x + 4 x 3 + x − 2 x 3 (1 − x 2) · 1 − x 2 2 x 3 − 3 x (1 − x 2) 3 3

    f ' '

    2

    2 2 2

    = 2

    1 −

    2 2 2 2

    2 − 3 − 3

    8 2 = 2 = 3 2 3

    2 2 1 −

    4

    2

    En cuyo caso, y = 1 − x 2 = 2

    1 −

    2 2 3 2 − 2 2 < 0 ⇒ 3 1 2 2 es máximo 2 2 = 1 − 2 = 4 1 − 1 = 2 Las dimensiones se corresponden con un CUADRADO de lado 1 = 2 2 2 2 2

24. Ejercicio 5 Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura.4 Problemas de optimización Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6.6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima. Solución: llamemos: 2x = Lado del triángulo equilátero = base del rectángulo x = Mitad del lado del triángulo equilátero y = Altura del rectángulo h = altura del triángulo El perímetro es: P = 6 x + 2 y = 6 , 6 Altura del triángulo: h = (2 x) 2 − x 2 = 3 x 2 = 3 · x El área total de la ventana es: 1 A = · (2 x) · 2 (3 · x) + (2 x · y) = 3 · x 2 + 2 x · y Despejando "y" del perímetro: 2 y = 6 , 6 − 6 x ⇒ y = 3 , 3 − 3 x f (x) = 3 · x 2 +

2 x · (3 , 3 − 3 x) = (3 − 6) · x 2 + 6 , 6 x es la función de superficie a optimizar. (3 − 6) · x + 6 , 6 − 6 , 6 − 3 , 3 = f ' (x) = 0 ⇒ 2 · (3 − 6) · x + 6 , 6 = 0 ⇒ x = (3 − 6) 2 · (3 − 6) (6 + 3) 3 , 3 3 , 3 · (6 + 3) 3 , 3 · (6 + 3) = = = = (36 − 3) 33 10 (6 − 3) (6 + 3) es un máximo. f ' ' (x) = 2 · (3 − 6) < 0 , por lo que f ' (x) = 2 · = 10 DIMENSIONES DEL RECTÁNGULO: BASE = 2 x = 2 · (6 + 3) 10 ALTURA = y = 3 , 3 − 3 · = (6 + 3) (6 + 3) 10 5 = 1,55 (33 3 · 6 + − 10 10 3) = 15 − 3 3 0,98 10 LADO DEL TRIÁNGULO: 2 x 1,55