Ejercicios resueltos

Geometría

BY S3R4

Evau 2025

2025.Geometría

Modelo Sean los puntos $A(0,0,0)$ **y** $B(1,1,1)$**, y la recta** $r \equiv (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda+1), \lambda \in R$**.**

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A **y** B **son simétricos.**

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r **y pasa por el punto** B**.**

c) (0.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r **y pase por** A**.**

Solución

a) Plano de simetría respecto a los puntos A y B

El plano buscado es el **plano mediador** del segmento AB. Este plano se caracteriza por pasar por el punto medio del segmento y tener como vector normal el vector que une ambos puntos.

Cálculo del punto medio (M):

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Cálculo del vector normal ($\vec{n}$):

$$\vec{n} = \vec{AB} = B - A = (1-0, 1-0, 1-0) = (1,1,1)$$

Ecuación del plano:

Utilizando la forma $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$:

$$1\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \implies x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

Multiplicando por 2 para obtener coeficientes enteros:

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv 2x + 2y + 2z - 3 = 0}$$

---

b) Plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B

Extraemos de la recta $r \equiv (\lambda,\lambda,\lambda+1)$ un punto P y su vector director $\vec{v}_r$:

- Punto de la recta (para $\lambda = 0$): $P(0,0,1)$.
- Vector director: $\vec{v}_r = (1,1,1)$.

Para hallar el plano π_2, necesitamos un segundo vector contenido en él, que obtenemos uniendo P con $B(1,1,1)$:

$$\vec{u} = \vec{PB} = B - P = (1-0, 1-0, 1-1) = (1,1,0)$$

El vector normal del plano se obtiene mediante el producto vectorial $\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{u}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1)\mathbf{i} - (0-1)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k} = (-1, 1, 0)$$

La ecuación del plano que pasa por $B(1,1,1)$ es:

$$-1(x-1) + 1(y-1) + 0(z-1) = 0 \implies -x + 1 + y - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv x - y = 0}$$

---

c) Recta paralela a r que pasa por $A(0,0,0)$

Una recta paralela a r debe compartir su vector director $\vec{v}_r = (1,1,1)$. Como debe pasar por el origen $A(0,0,0)$, su ecuación es inmediata:

Ecuación paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\mathbf{s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}}$$

Modelo Dados los tres planos $\pi_1 : -2x-2y+z=0$; $\pi_2 : -2x+y-2z=0$ y $\pi_3 : x-2y-2z=0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el angulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres

planos.

b) (1.5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el

punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar

la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

Solución

a) Ángulos entre planos e intersección

Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{n}_1 = (-2,-2,1), \quad \vec{n}_2 = (-2,1,-2), \quad \vec{n}_3 = (1,-2,-2)$$

1. Determinación de los ángulos:

El ángulo α entre dos planos se halla mediante el producto escalar de sus vectores normales. Dado que el módulo de los tres vectores es $|\vec{n}_i| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$:

- **Entre π_1 y π_2:** $\cos\alpha_{12} = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|4-2-2|}{3\cdot 3} = 0 \implies \alpha_{12} = 90^\circ$
- **Entre π_1 y π_3:** $\cos\alpha_{13} = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_3|} = \frac{|-2+4-2|}{3\cdot 3} = 0 \implies \alpha_{13} = 90^\circ$
- **Entre π_2 y π_3:** $\cos\alpha_{23} = \frac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_2||\vec{n}_3|} = \frac{|-2-2+4|}{3\cdot 3} = 0 \implies \alpha_{23} = 90^\circ$

Los tres planos son **perpendiculares entre sí dos a dos**.

2. Intersección de los planos:

Al ser planos homogéneos (pasan por el origen) y tener vectores normales linealmente independientes, el sistema formado por las tres ecuaciones es un sistema compatible determinado cuya única solución es el origen de coordenadas: $\mathbf{I(0,0,0)}$.

b) Determinación del punto P y su proyección Q_3

1. Hallar el punto P:

Si Q_1 es la proyección de P sobre π_1, entonces $P = Q_1 + t_1\vec{n}_1$. Del mismo modo, $P = Q_2 + t_2\vec{n}_2$.

$$P = \left(\frac{1}{3} - 2t_1, \frac{4}{3} - 2t_1, \frac{10}{3} + t_1\right) = \left(-\frac{1}{3} - 2t_2, \frac{8}{3} + t_2, \frac{5}{3} - 2t_2\right)$$

Igualando las coordenadas:

$$1/3 - 2t_1 = -1/3 - 2t_2 \implies t_1 - t_2 = 1/3$$

$$4/3 - 2t_1 = 8/3 + t_2 \implies 2t_1 + t_2 = -4/3$$

Resolviendo el sistema obtenemos $t_1 = -1/3$ y $t_2 = -2/3$. Sustituyendo t_1:

$$P = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}, \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\right) \implies \mathbf{P(1, 2, 3)}$$

2. Proyección Q_3 de P sobre π_3:
La recta perpendicular a π_3 que pasa por P es $r_3 \equiv (1 + \lambda, 2 - 2\lambda, 3 - 2\lambda)$.
Sustituimos en π_3:

$$(1 + \lambda) - 2(2 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) = 0 \implies 9\lambda - 9 = 0 \implies \lambda = 1$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en la recta r_3, obtenemos la proyección:

$$\mathbf{Q_3 = (2, 0, 1)}$$

(Ordinaria)

Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Solución

a) Recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 1$.

De la recta extraemos el punto $P_r(1, 0, 2)$ y el vector director $\vec{v}_r = (2, 0, 1)$.

Del plano extraemos su vector normal $\vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$.

Plano que contiene a r y es perpendicular a π

El plano buscado, π_1, queda determinado por el punto P_r y dos vectores directores contenidos en él: el de la propia recta ($r \subset \pi_1$) y el normal de π (debido a la perpendicularidad entre planos).

Vectores directores de π_1: $\vec{u} = \vec{v}_r = (2, 0, 1)$ y $\vec{w} = \vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$.

Ecuación general:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \implies (x-1)(-2) - y(-6-1) + (z-2)(4) = 0$$

$$-2x + 2 + 7y + 4z - 8 = 0 \implies \pi_1 \equiv 2x - 7y - 4z + 6 = 0$$

b) Recta contenida en π que corta perpendicularmente a r}

Esta recta, s, nace de la intersección del plano π con un plano auxiliar π_2 que contiene a r y es perpendicular a r. Sin embargo, la forma más directa es hallar el punto de corte Q.

La recta s debe pasar por el punto de intersección de r y π_1 del apartado anterior (ya que ese plano contenía la perpendicular), pero la condición de corte perpendicular implica que s pasa por el pie de la perpendicular desde r a π.

Punto de intersección $Q = r \cap \pi$:

Paramétricas de r: $\begin{cases} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 0 \\ z = & 2 + \lambda \end{cases}$,. Sustituimos en π:

$$(1+2\lambda)+2(0)-3(2+\lambda) = 1 \implies 1+2\lambda-6-3\lambda = 1 \implies -\lambda = 6 \implies \lambda = -6$$

El punto es $Q = (1 - 12, 0, 2 - 6) = (-11, 0, -4)$.

Vector director de s: Debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$ (porque $s \subset \pi$) y perpendicular a $\vec{v}_r$.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 7, 4)$$

Así pues

$$s \equiv \frac{x+11}{-2} = \frac{y}{7} = \frac{z+4}{4}$$

.

c) Puntos de r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$

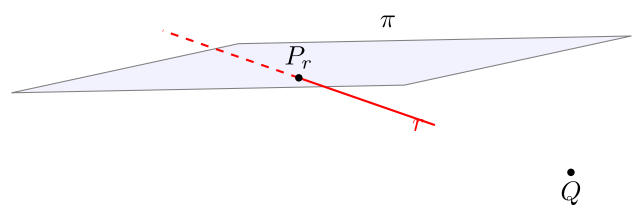
Un punto genérico de r es $P_\lambda(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$. Aplicamos la fórmula de distancia punto-plano:

$$d(P_\lambda, \pi) = \frac{|(1+2\lambda) + 2(0) - 3(2+\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14}$$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 6 - 3\lambda - 1|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \implies |-\lambda - 6| = 14$$

Caso 1: $-\lambda - 6 = 14 \implies \lambda = -20$. Punto $P_1 = (-39, 0, -18)$.

Caso 2: $-\lambda - 6 = -14 \implies \lambda = 8$. Punto $P_2 = (17, 0, 10)$.



(Ordinaria)Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x+y=2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el area del tri´ angulo formado por´ P y los puntos de corte del plano π con los ejes coorde-

nados.

Solución

a) Dados $P(0,1,1)$ y $\pi : x+y-2=0$:

$$d(P,\pi) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Punto Q del plano

El punto Q es la proyección ortogonal de P sobre π. Usando la recta perpendicular $r(t)=(t,1+t,1)$ e intersectando con el plano:

$$t+(1+t)=2 \implies 2t=1 \implies t=1/2$$

El punto es $\mathbf{Q}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \mathbf{1})$.

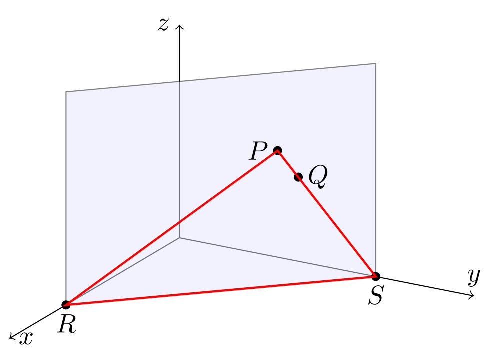
c) Área del Triángulo

Puntos de corte de π con los ejes: $R(2,0,0)$ y $S(0,2,0)$.

Vectores: $\vec{PR}=(2,-1,-1)$ y $\vec{PS}=(0,1,-1)$.

$$\vec{PR} \times \vec{PS} = (2,2,2)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{3}\ \text{u}^2$$



Coincidencias

Sara esta revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un modulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como

segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldandola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son $V1$ cuyos extremos son los puntos $A(1,2,-3)$ y $B(1,6,1)$ y $V2$ cuyos extremos son los puntos $C(-2,-8,7)$ y $D(10,-4,7)$.

a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de $V1$ y $V2$. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con $V1$ y con $V2$.

b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a $V1$ como a $V2$. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Solución

Se analizan dos vigas, V_1 y V_2, tratadas como segmentos en el espacio.

V_1 tiene extremos $A(1,2,-3)$ y $B(1,6,1)$.

V_2 tiene extremos $C(-2,-8,7)$ y $D(10,-4,7)$.

a) Viga soldada a los puntos medios

Sara decide conectar los puntos medios de ambas vigas.

Cálculo de los puntos medios (Extremos de la nueva viga)

El punto medio M se calcula como $\frac{P_1+P_2}{2}$:

Extremo en V_1: $M_1 = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{-1})$

Extremo en V_2: $M_2 = \left(\frac{-2+10}{2}, \frac{-8-4}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = (\mathbf{4}, \mathbf{-6}, \mathbf{7})$

Cosenos de los ángulos

Definimos los vectores directores de las vigas originales $(\vec{d_1}, \vec{d_2})$ y de la viga de refuerzo $(\vec{v}_{ref})$:

$$\vec{d_1} = B - A = (0,4,4)$$
$$\vec{d_2} = D - C = (12,4,0)$$
$$\vec{v}_{ref} = M_2 - M_1 = (3,-10,8)$$

Utilizando la fórmula $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$:

- **Con V_1:** $\cos\alpha_1 = \frac{|(3,-10,8)\cdot(0,4,4)|}{\sqrt{173}\sqrt{32}} = \frac{|-40+32|}{\sqrt{5536}} = \frac{8}{\sqrt{5536}} \approx \mathbf{0{,}107}$
- **Con V_2:** $\cos\alpha_2 = \frac{|(3,-10,8)\cdot(12,4,0)|}{\sqrt{173}\sqrt{160}} = \frac{|36-40|}{\sqrt{27680}} = \frac{4}{\sqrt{27680}} \approx \mathbf{0{,}024}$

b) Viga perpendicular común (Máxima resistencia)

Sara busca los puntos $P \in V_1$ y $Q \in V_2$ tales que el vector $\vec{PQ}$ sea perpendicular a ambas vigas.

1. Ecuaciones paramétricas}

- $P = (1, 2 + 4\lambda, -3 + 4\lambda)$
- $Q = (-2 + 12\mu, -8 + 4\mu, 7)$
- $\vec{PQ} = Q - P = (-3 + 12\mu, -10 + 4\mu - 4\lambda, 10 - 4\lambda)$

Condiciones de perpendicularidad
Para optimizar la resistencia, se debe cumplir:

$$\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{d_1} = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{d_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 16\mu - 32\lambda = 0 \implies \mu = 2\lambda \\ 160\mu - 16\lambda = 76 \end{cases}$$

Sustituyendo $\mu = 2\lambda$ en la segunda ecuación:

$$160(2\lambda) - 16\lambda = 76 \implies 304\lambda = 76 \implies \lambda = \frac{1}{4} \implies \mu = \frac{1}{2}$$

Coordenadas de los extremos:Sustituyendo los parámetros obtenidos en las ecuaciones de P y Q:

- **Extremo en V_1 (P):** $(1, 2 + 1, -3 + 1) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -\mathbf{2})$
- **Extremo en V_2 (Q):** $(-2 + 6, -8 + 2, 7) = (\mathbf{4}, -\mathbf{6}, \mathbf{7})$

Extraordinaria

Sean los puntos A(1, 1, 2), B(2, −1, 0), C(−2, 0, 3) y D(2, −3, −1) y la recta:$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$**.**

a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Solución

a)Datos del problema:

Puntos: $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$.

Recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Comprobación de no coplanaridad y volumen:

Definimos los vectores con origen en A:

- $\vec{AB} = B - A = (1,-2,-2)$
- $\vec{AC} = C - A = (-3,-1,1)$
- $\vec{AD} = D - A = (1,-4,-3)$

Calculamos el producto mixto para verificar la independencia lineal:

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1(3+4)+2(9-1)-2(12+1) = 7+16-26 = -3$$

Como el producto mixto es $-3 \neq 0$, los puntos **no son coplanarios**. El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]| = \frac{1}{6}|-3| = \mathbf{0{,}5}\ \mathrm{u}^{\mathbf{3}}$$

b) Área de la cara ABC y altura desde D

Calculamos el área de la base mediante el producto vectorial:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4,5,-7)$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+25+49} = \frac{\sqrt{\mathbf{90}}}{\mathbf{2}}\ \mathrm{u}^{\mathbf{2}}$$

La altura h desde D se obtiene mediante la fórmula $V = \frac{1}{3}\cdot \text{Base}\cdot h$:

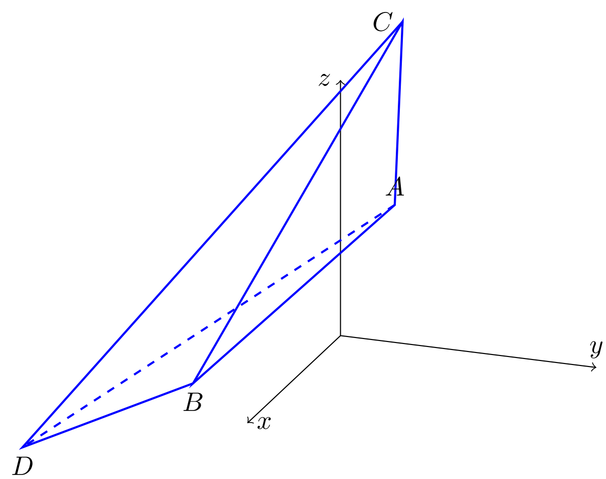
$$h = \frac{3\cdot 0{,}5}{\sqrt{90}/2} = \frac{3}{\sqrt{90}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{10}}\ \mathrm{u}$$

c) Distancia entre las rectas r y s_{BD}

- **Recta r:** Punto $P_r(1,-1,0)$ y vector $\vec{v}_r(2,1,-1)$.
- **Recta s (por B, D):** Punto $B(2,-1,0)$ y vector $\vec{v}_s = \vec{BD} = (0,-2,-1)$.

Vector entre rectas: $\vec{P_rB} = (1,0,0)$.

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{P_rB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{29}}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{29}}}{\mathbf{29}} \text{ u}$$



Extraordinaria

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.

b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Solución

a) Plano paralelo al eje OZ que pasa por A y B

Para determinar el plano π_1, necesitamos un punto y dos vectores directores no paralelos:

1. **Punto:** Seleccionamos $A(0,0,1)$.
2. **Vector director 1:** El vector que une los puntos, $\vec{AB} = B - A = (1,0,0)$.
3. **Vector director 2:** Al ser paralelo al eje OZ, tomamos el vector director de dicho eje, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Ecuación del plano:

Planteamos el determinante con un punto genérico (x,y,z):

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la segunda fila:

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} y & z-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -y = 0 \implies y = 0$$

Resultado: La ecuación del plano es $\pi_1 \equiv y = 0$ (el plano coordenado XZ).

b) Recta perpendicular al plano $z=1$ a distancia unidad de A y B

Sea r la recta buscada.

1. **Vector director:** Al ser perpendicular al plano $z=1$ (cuyo normal es $(0,0,1)$), el vector director de la recta es $\vec{v}_r = (0,0,1)$. Por tanto, la recta es vertical y tiene la forma:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

2. **Condición de distancia:** La distancia de un punto (x_1, y_1, z_1) a una recta vertical en el espacio se reduce a la distancia entre sus proyecciones en el plano XY:

$$d(P,r) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$$

Para los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$:

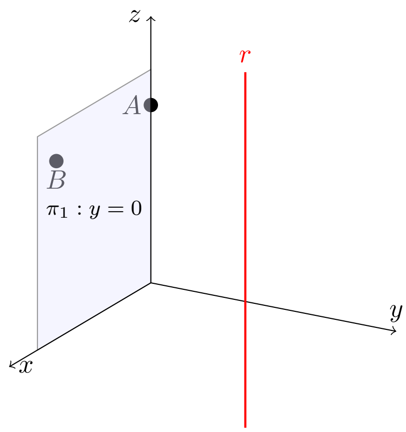
- $x_0^2 + y_0^2 = 1^2$
- $(x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1^2$

3. **Resolución del sistema:** Igualando ambas expresiones: $x_0^2 = (x_0 - 1)^2 \implies x_0^2 = x_0^2 - 2x_0 + 1 \implies x_0 = 1/2$.
   Sustituyendo en la primera: $(1/2)^2 + y_0^2 = 1 \implies y_0^2 = 3/4 \implies y_0 = \pm\sqrt{3}/2$.

Resultado: Existen dos rectas posibles. Una de ellas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1/2 \\ y = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Representación Visual



Extraordinaria coincidencias

Sean el punto $A(1,2,3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 2z = 1$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π.

b) (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π.

Solución

a) Distancia de la recta r al plano π

Primero, analizamos la posición relativa entre la recta y el plano. Extraemos el vector director de la recta $\vec{v}_r = (2,0,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (2)(1) + (0)(2) + (1)(-2) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Como el producto escalar es 0, la recta es paralela al plano o está contenida en él. Tomamos el punto $P_r(1,0,2)$ de la recta y calculamos su distancia al plano π:

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1(1) + 2(0) - 2(2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1-4-1|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

b) Proyección ortogonal del punto A sobre la recta r

La proyección ortogonal A' es el punto de la recta tal que el vector $\vec{AA'}$ es perpendicular a $\vec{v}_r$.

1. Punto genérico de r: $X(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$.

2. Vector $\vec{AX} = X - A = (2\lambda, -2, \lambda - 1)$.

3. Condición de perpendicularidad $\vec{AX} \cdot \vec{v}_r = 0$:

$$2(2\lambda)+0(-2)+1(\lambda-1) = 0 \implies 4\lambda+\lambda-1 = 0 \implies 5\lambda = 1 \implies \lambda = 1/5$$

Sustituyendo $\lambda = 1/5$ en X: $A'(1 + 2/5, 0, 2 + 1/5) = (\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5})$. \\

c) Volumen del tetraedro

Buscamos un plano π' que pasa por $A(1,2,3)$ y es paralelo a π ($\vec{n}_{\pi'} = (1,2,-2)$).

1. **Ecuación de π':** $1(x-1)+2(y-2)-2(z-3) = 0 \implies x+2y-2z+1 = 0$.

2. **Cortes con los ejes:**

   - Eje OX $(y,z=0)$: $x + 1 = 0 \implies P_1(-1,0,0)$.
   - Eje OY $(x,z=0)$: $2y + 1 = 0 \implies P_2(0,-1/2,0)$.
   - Eje OZ $(x,y=0)$: $-2z + 1 = 0 \implies P_3(0,0,1/2)$.

3. **Volumen:** Con el origen $O(0,0,0)$, el volumen es $V = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right|$:

$$V = \frac{1}{6}\left|(-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

Resultado: $V = 1/24$ unidades cúbicas.