



Probabilidad

Ejercicios resueltos

Evau 2025

BY S3R4

Modelo Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73.2 %.

a) (1.5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0.5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos esten vacunados contra la gripe.

Solución

Datos: Cobertura $p = 0,732$. Probabilidad de no vacunado $q = 1 - 0,732 = 0,268$.

a) Restricción de reuniones.

Sea X el número de personas no vacunadas en una reunión de tamaño n . $X \sim B(n, 0,268)$. Queremos saber si $P(X > 1) > 0,5$.

Una reunión de n personas debe restringirse si $P(X > 1) > 0,5$.

■ Para $n = 5$:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ P(X = 0) &= \binom{5}{0} (0,268)^0 (0,732)^5 \approx 0,2085 \\ P(X = 1) &= \binom{5}{1} (0,268)^1 (0,732)^4 \approx 0,3816 \\ P(X > 1) &= 1 - (0,2085 + 0,3816) = 0,4099. \text{ No se restringe } (0,4099 < 0,5). \end{aligned}$$

■ Para $n = 7$:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{7}{0} (0,268)^0 (0,732)^7 \approx 0,1118 \\ P(X = 1) &= \binom{7}{1} (0,268)^1 (0,732)^6 \approx 0,2863 \\ P(X > 1) &= 1 - (0,1118 + 0,2863) = 0,6019. \text{ Se restringe } (0,6019 > 0,5). \end{aligned}$$

b) Muestra de 500 personas.

$n = 500, p = 0,732$. Aproximamos $X \sim B(500, 0,732)$ por $Y \sim N(\mu, \sigma)$:

$$\mu = np = 366;$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,732 \cdot 0,268} \approx 9,90.$$

Calculamos $P(X \geq 350)$ con corrección de continuidad $P(Y \geq 349,5)$:

$$Z = \frac{349,5 - 366}{9,90} \approx -1,67$$

$$P(Z \geq -1,67) = P(Z \leq 1,67) \approx \mathbf{0,9525}.$$

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20 % de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50 % entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74 % de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8 % entre los de 25 a 64 y al 53.7 % entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Solución

Eventos: E_1 (14-24), E_2 (25-64), E_3 (>64), L (Lector).

$P(E_1) = 0,20$, $P(E_2) = 0,50$, $P(E_3) = 0,30$.

$P(L|E_1) = 0,74$, $P(L|E_2) = 0,658$, $P(L|E_3) = 0,537$.

a) Probabilidad de ser lector habitual $P(L)$:

$$P(L) = P(L \cap E_1) + P(L \cap E_2) + P(L \cap E_3) = P(L|E_1)P(E_1) + P(L|E_2)P(E_2) + P(L|E_3)P(E_3)$$

$$P(L) = (0,2 \cdot 0,74) + (0,5 \cdot 0,658) + (0,3 \cdot 0,537) = 0,148 + 0,329 + 0,1611 = \mathbf{0,6381}$$

b) Probabilidad de tener 25-64 si no es lector $P(E_2|\bar{L})$:

$$P(\bar{L}) = 1 - 0,6381 = 0,3619.$$

$$P(E_2|\bar{L}) = \frac{P(E_2) \cdot P(\bar{L}|E_2)}{P(\bar{L})} = \frac{0,5 \cdot (1 - 0,658)}{0,3619} = \frac{0,171}{0,3619} \approx \mathbf{0,4725}$$

Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, \bar{A} y \bar{B} los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0,7$, $P(\bar{B}) = 0,2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1$.

a) (0.5 puntos) Razone si \bar{A} y \bar{B} son dos sucesos independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.

c) (1 punto) Calcule $P(\bar{A}|B)$.

Solución

$$P(A) = 0,7, P(\bar{B}) = 0,2 \implies P(B) = 0,8. P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1.$$

a) Independencia de \bar{A} y \bar{B} :

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Como $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1 \neq 0,06$, **no son independientes**.

b) Calcular $P(A \cap B)$:

$$\text{Por leyes de De Morgan: } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0,1 \implies P(A \cup B) = 0,9.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,9 = 0,7 + 0,8 - P(A \cap B).$$

$$P(A \cap B) = 1,5 - 0,9 = \mathbf{0,6}.$$

c) Calcular $P(\bar{A}|B)$:

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,8 - 0,6}{0,8} = \frac{0,2}{0,8} = \mathbf{0,25}$$

En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.

c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Solución

Sea X la variable aleatoria “masa, en kilogramos, del cuerpo de un hombre de la población laboral española del estudio”, $X \sim N(75,67, 11,05)$.

a) Masa entre 60 y 80 kg:

$$Z_1 = \frac{60-75,67}{11,05} \approx -1,42; Z_2 = \frac{80-75,67}{11,05} \approx 0,39.$$

$$P(-1,42 < Z < 0,39) = \Phi(0,39) - \Phi(-1,42) = 0,6517 - (1 - 0,9222) = \mathbf{0,5739}$$

b) Masa superior a 100 kg:

$$Z = \frac{100 - 75,67}{11,05} \approx 2,20 \implies P(Z > 2,20) = 1 - 0,9861 = \mathbf{0,0139}$$

c) Probabilidad en 10 hombres ($n = 10, p = 0,0139$):

Sea $Y \sim B(10, 0,0139)$. Calculamos $P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$.

$$P(Y = 0) = (0,9861)^{10} \approx 0,8694.$$

$$P(Y = 1) = 10 \cdot (0,0139) \cdot (0,9861)^9 \approx 0,1226.$$

$$P(Y \leq 1) = 0,8694 + 0,1226 = \mathbf{0,9920}.$$

La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Solución

Eventos: LL (Lluvia), C (Caída).

$P(C|LL) = 0,08$, $P(C|\bar{L}\bar{L}) = 0,004$, $P(LL \cap C) = 0,032$.

a) Probabilidad de no caerse $P(\bar{C})$:

De $P(LL \cap C) = P(LL) \cdot P(C|LL)$, despejamos $P(LL)$:

$$0,032 = P(LL) \cdot 0,08 \implies P(LL) = 0,4$$

$$P(C) = P(LL)P(C|LL) + P(\bar{L}\bar{L})P(C|\bar{L}\bar{L}) = 0,032 + (0,6 \cdot 0,004) = 0,032 + 0,0024 = 0,0344$$

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,0344 = \mathbf{0,9656}$$

b) Sabiendo que se ha caído, no llueve $P(\bar{L}\bar{L}|C)$:

$$P(\bar{L}\bar{L}|C) = \frac{P(\bar{L}\bar{L} \cap C)}{P(C)} = \frac{0,0024}{0,0344} \approx \mathbf{0,0698}$$

Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B, según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

a) (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social: «De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B, en diez trayectos llegue con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón.» ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?

b) (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

Solución

Sea R =Retraso > 60 min: $P(R) = 1 - (0,80 + 0,15) = 0,05$.

a) Análisis del post:

$n = 40, p = 0,05$. Sea $X \sim B(40, 0,05)$. El usuario dice que $P(X \geq 10) < 10^{-6}$.

$P(X \geq 10) \approx 1 - P(X \leq 9)$. Usando aproximación o suma de binomios:

$$P(X \geq 10) \approx 3,5 \times 10^{-5}.$$

El usuario no ha hecho bien los cálculos, pues la probabilidad es mayor que una entre un millón (aunque sigue siendo muy baja).

b) Probabilidad de devolver dinero en enero 2025:

En enero (31 días), $n = 31 \cdot 6 = 186$ trayectos.

Devolución (\$D\$): Retraso ≥ 30 min. $P(D) = 0,15 + 0,05 = 0,20$.

$$X \sim B(186, 0,20) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(37,2, 5,45).$$

Como mucho una sexta parte: $X \leq \frac{186}{6} = 31$.

$$P(Z \leq \frac{31,5-37,2}{5,45}) = P(Z \leq -1,05) = 1 - 0,8531 = \mathbf{0,1469}.$$

Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida

por: $P(7) = P(3) = 1/4$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A - C)} \cap B)$.

b) (1.25 puntos) $P((A \cap B) | \overline{C})$.

Solución

Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. El conjunto tiene un total de $N = 8$ sucesos elementales.

Cálculo de las Probabilidades Elementales

Se nos define una medida de probabilidad P tal que:

- $P(7) = P(3) = 1/4$.
- Los 6 sucesos restantes ($\{2, 5, 11, 13, 17, 19\}$) son equiprobables con probabilidad p .

Dado que la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales debe ser igual a 1:

$$P(3) + P(7) + 6p = 1 \implies \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 6p = 1$$

$$\frac{1}{2} + 6p = 1 \implies 6p = \frac{1}{2} \implies p = \frac{1}{12}$$

En resumen:

- $P(3) = P(7) = \frac{3}{12}$ (equivalente a $1/4$).
- $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = \frac{1}{12}$.

Definición de los Sucesos

- $A = \{7, 11, 13, 19\}$
- $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$
- $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$

a) Cálculo de $P(\overline{(A - C)} \cap B)$

Diferencia de conjuntos ($A - C$): Son los elementos de A que no están en C .

$$A - C = \{7, 11, 13, 19\} \setminus \{3, 5, 7, 11, 13\} = \{19\}$$

Complementario ($\overline{A - C}$): Todos los elementos de E excepto el 19.

$$\overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

Intersección con B :

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \cap \{2, 5, 7, 13, 17\} = \{2, 5, 7, 13, 17\}$$

Observamos que la intersección resultante es exactamente el suceso B .

Cálculo de la probabilidad:

$$P(B) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17)$$

$$P(B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \approx \mathbf{0,5833}$$

b) Cálculo de $P((A \cap B)|\bar{C})$

Utilizamos la definición de probabilidad condicionada: $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Suceso condicionante (\bar{C}):

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \implies \bar{C} = \{2, 17, 19\}$$

$$P(\bar{C}) = P(2) + P(17) + P(19) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Intersección del numerador ($(A \cap B) \cap \bar{C}$):

Primero hallamos $A \cap B$:

$$A \cap B = \{7, 11, 13, 19\} \cap \{2, 5, 7, 13, 17\} = \{7, 13\}$$

Ahora intersecamos con \bar{C} :

$$\{7, 13\} \cap \{2, 17, 19\} = \emptyset$$

Resultado final: Como la intersección es el conjunto vacío, la probabilidad es cero:

$$P((A \cap B)|\bar{C}) = \frac{P(\emptyset)}{P(\bar{C})} = \frac{0}{1/4} = \mathbf{0}$$

En una empresa tecnológica internacional el 70 % de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de software, labor a la que se dedican también tres

de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de software en la empresa.

b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan software para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Solución

E : El empleado es europeo. $P(E) = 0,7 \implies P(\bar{E}) = 0,3$.

S : El empleado se dedica al desarrollo de software.

Probabilidades condicionadas dadas:

■ Empleados europeos que desarrollan software: $P(S|E) = \frac{3}{7}$.

■ Empleados no europeos que desarrollan software: $P(S|\bar{E}) = \frac{1}{3}$.

a) Probabilidad de ser europeo y no desarrollar software

Buscamos la probabilidad de la intersección de ser europeo (E) y no realizar desarrollo de software (\bar{S}), denotada como $P(E \cap \bar{S})$.

Utilizando la probabilidad del suceso contrario para la condición:

$$P(\bar{S}|E) = 1 - P(S|E) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Ahora, aplicamos la definición de probabilidad de la intersección:

$$P(E \cap \bar{S}) = P(E) \cdot P(\bar{S}|E)$$

$$P(E \cap \bar{S}) = 0,7 \cdot \frac{4}{7} = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{10} = 0,4$$

La probabilidad es del 40 %.

b) Probabilidad del segundo sorteo (Distribución Binomial)}

Primero, calculamos la probabilidad total de que un empleado cualquiera desarrolle software, $P(S)$, usando el `\textbf{Teorema de la Probabilidad Total}`:

$$P(S) = P(E) \cdot P(S|E) + P(\bar{E}) \cdot P(S|\bar{E})$$

$$P(S) = \left(0,7 \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(0,3 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

$$P(S) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \mathbf{0,4}$$

Para el sorteo de 10 empleados, definimos la variable aleatoria X : número de empleados que desarrollan software entre los 10 elegidos. X sigue una **Distribución Binomial** $X \sim B(n = 10, p = 0,4)$.

Se pide la probabilidad de que "como mucho 2" desarrollen software, es decir, $P(X \leq 2)$:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Calculamos cada término mediante la fórmula $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$:

- $P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,4)^0 (0,6)^{10} \approx 0,0060$
- $P(X = 1) = \binom{10}{1} (0,4)^1 (0,6)^9 \approx 0,0403$
- $P(X = 2) = \binom{10}{2} (0,4)^2 (0,6)^8 = 45 \cdot 0,16 \cdot 0,0168 \approx 0,1209$

Sumamos las probabilidades:

$$P(X \leq 2) = 0,0060 + 0,0403 + 0,1209 = \mathbf{0,1672}$$

La probabilidad de que se entregue el segundo paquete de acciones es de **0.1672** (16.72%).